本附加數學科課程
與
《中學課程綱要:附加數學(中四至中五)(1992)》
內容對照

本附加數學課程指引是由一九九二年編訂之附加數學課程綱要修訂而成，主要是刪除或減少其中一些課題。為方便教師參考，這些課題以 ▒▒▒ 方格覆蓋。說明及備註則列於 ☐ 方格內，讓教師較易掌握教學的內容和深度。

---

3. 課　程

單元 1：數學歸納法原理

特定目標：

1. 理解數學歸納法的概念。
2. 熟習數學歸納法的步驟。
3. 在各方面應用數學歸納法。

內容	時間分配	教學建議
1.1 數學歸納法的概念	2	學生應認識到有些公式只對正整數才成立。例子包括等差級數及等比級數 n 項和的公式。 那些公式雖或可用其他方法求得，但亦可利用公式中的變數是正整數的特點，用另一種方法來證明。這種方法就是「數學歸納法」。 教師可先用一些簡單但不常見的公式，以作說明。例如： $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 當 $n = 1$、2 及 3 時，這公式成立。我們預期這公式對所有正整數 n 都成立。但我們怎作保證呢？例如，當 $n = 100$ 或 257 時，我們怎知道那公式仍然成立？這就須證明其有效性了。
1.2 數學歸納法的步驟	~~2~~ 3	數學歸納法的步驟可用一簡單的例子帶出，而不應一開始便引用一般命題 P(n)。所得結果可於稍後才總結為一般性。 教師應特別注重數學歸納法證明時的表達方式。以下是一個例子。

▒ 表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議

12

例

求證對所有正整數 n,

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\text{。}$$

設 P(n) 為命題 “$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$”。

當 n = 1, 左方 = 1

$$\text{右方} = \frac{1(1+1)}{2}=1$$

∴ 左方 = 右方

故 P(1) 成立。

假設 P(k)成立, 即

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}\text{。}$$

當 n = k + 1,

$$\begin{aligned}\text{左方} &= 1+2+3+\cdots+k+(k+1)\\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\ &= (k+1)(\frac{k}{2}+1)\\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\\ &= \text{右方}\end{aligned}$$

∴ P(k + 1) 亦成立。

根據數學歸納法原理, P(n) 對所有正整數 n 皆成立。

用來介紹數學歸納法步驟的例子, 不應涉及太多運算, 否則會分散學生的注意力, 而不能集中理解基本的論點。以下是另一些有用的例子：

內容	時間分配	教學建議

13

$$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

及 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

1.3 數學歸納法的應用 ~~4~~ 5

教師如今可介紹一些較複雜的例子, 以說明數學歸納法的效用。例如：證明對任何正整數 n,

(1) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n\left(4n^2-1\right)$

(2) $1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\cdots+(n-2)2+n\cdot1 = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

(3) $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\cdots+\sin n\alpha$

$$=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

其中 α 並不等於 2π 的倍數。

(若學生已學過有關的三角函數公式, 則此題可給學生作例子；否則可留待複習時用。)

除可用來證明級數和的公式外, 數學歸納法的應用, 還應包括以下各類：

(1) 可整除性的證明, 例如,

(*a*) 7^n+3n-1 可被 9 整除

(*b*) 23^n-1 可被 11 整除

(*c*) $a^{2n-1}+b^{2n-1}$ 可被 a + b 整除

例 (*c*) 可證明如下：

設 P(n) 為 “$a^{2n-1}+b^{2n-1}$ 可被 a + b 整除”。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議

當 n = 1,

$a^{2n-1} + b^{2n-1} = a + b$

$\therefore$P(1) 成立。

假設 P(k) 成立,

即 $a^{2k-1} + b^{2k-1} = m(a + b)$。

當 n = k + 1 時,

$$\begin{aligned} a^{2(k+1)-1} + b^{2(k+1)-1} &= a^{2k+1} + b^{2k+1} \\ &= a^2 \cdot a^{2k-1} + b^2 \cdot b^{2k-1} \\ &= a^2 \cdot a^{2k-1} + a^2 \cdot b^{2k-1} - a^2 \cdot b^{2k-1} + b^2 \cdot b^{2k-1} \\ &= a^2 (a^{2k-1} + b^{2k-1}) - (a^2 - b^2)\, b^{2k-1} \\ &= a^2 m(a + b) - (a + b)(a - b)\, b^{2k-1} \\ &= (a + b)[a^2 m - (a - b)\, b^{2k-1}], \end{aligned}$$

而此式可被 (a + b) 整除。

即 P(k + 1) 亦成立。

根據數學歸納法原理, P(n) 對所有正整數 n 成立。

(2) 簡易不等式証明, 例如,

(a) 若 $x > -1$, 則

$(1 + x)^n > 1 + nx$

(b) 對正數 a_i (i = 1, 2, …, n),

$(1 + a_1)(1 + a_2)…(1 + a_n) > 1 + (a_1 + a_2 + … + a_n)$

(c) $2^n > n^2$, 其中 n > 5

例 (c) 可証明如下 :

設 P(n) 為 “$2^n > n^2$, 其中 n > 5”。

當 n = 5,

左方 $2^5 = 32$

右方 $5^2 = 25$

14

內容	時間分配	教學建議

$\therefore$ 左方 > 右方。

$\therefore$ P(5) 成立。

假設 P(k) 成立,

即 $2^k > k^2$, 其中 k > 5。

當 n = k + 1,

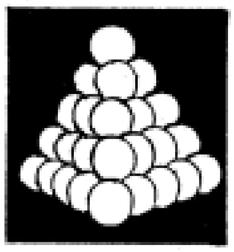
$$\begin{aligned} 2^{k+1} - (k + 1)^2 &= 2^{k+1} - k^2 - 2k - 1 \\ &= 2 \cdot 2^k - 2k^2 + k^2 - 5k + 3k - 15 + 14 \\ &= 2(2^k - k^2) + k(k - 5) + 3(k - 5) + 14 > 0 \end{aligned}$$

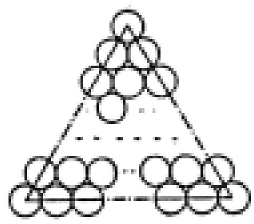
$\therefore 2^{k+1} > (k + 1)^2$

$\therefore$ P(k + 1) 成立

根據數學歸納法原理, P(n), 而 n ≥ 5, 成立。

(3) 簡易應用問題, 例如求圖中所示金字塔堆中共有球多少個球。





教師應提醒學生, 在有些命題中, n 不是由 1 開始的。例如 $2^n > n^2$ 便須 n ≥ 5。

15

時間分配: ~~8~~ 10

表示刪去的內容