內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
	2	*例二* 求 m 和 n 的值，得使以下數式恆為正數。 (*a*) $3x^2 + 2x + m$ (*b*) $nx^2 - 5x + 4$ 細項 6.5「絕對值」在此引入較為適合。
	~~8* + 8~~ 9*+ 12	

22

單元 4：三角

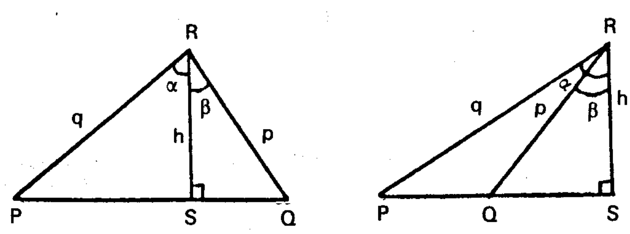
特定目標：

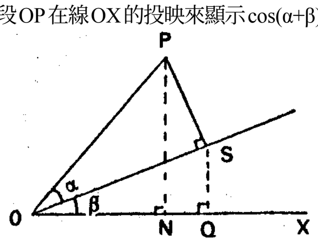
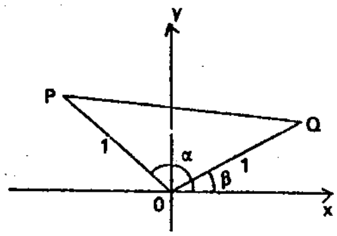
1. 理解任意角的六個三角函數及其圖像。
2. 理解及應用複角公式及和積互變公式。
3. 計算三角方程的通解。
4. 掌握解二維及三維空間較難問題的技巧。

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
4.1 弧度法	~~2*~~ 3*	學生應已明白弧度的意義。他們應能推導 $s = r\theta$ 及 $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ 兩條公式和計算弧長及扇形面積。 學生應能掌握角度與弧度的換算。計算三角函數和涉及弧度的公式應有足夠的練習。
4.2 任意角的六個三角函數及其圖形	~~4* + 4~~ 5* + 5	學生應已熟習正弦、餘弦和正切函數及其在 0 至 2π 區間內的圖像。這些函數的定義域可伸展至實數全集。 學生可發現正弦、餘弦和正切都是周期函數而其周期分別是 2π、2π 和 π。教師可用單位圓來定義餘割、正割和餘切。 學生應知道 $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 及 $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

23

表示刪去的內容

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		教師應指示出如何去化簡角是 $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ (n 是偶數或奇數）的六個三角函數。應給予學生涉及關係式和恆等式的分類練習。 相信學生亦可發現餘割、正割和餘切都是周期函數而其周期分別是 2π、2π 和 π。 *例一* 證明恆等式 $\sec^2\theta\ \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$。 *例二* 已知 $\frac{\sin^2\theta}{1+2\cos^2\theta} = \frac{3}{19}$，且 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$，試求 $\frac{\sin\theta}{1+2\cos\theta}$ 的值。
24 **4.3** 複角	~~10~~ 9	教師可利用下列圖中三角形 PQR 的面積來介紹 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ 的公式： 

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
25		教師亦可利用線段OP在線OX的投映來顯示 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$  或應用餘弦公式(如學生已學習此公式)於下圖三角形 OPQ 來顯示 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$。  學生應注意 $\sin(A \pm B)$及 $\cos(A \pm B)$ 的公式對任意角 A 和 B 都成立。教師應提供足夠例子及練習給學生以使他們熟習這些公式，並可鼓勵學生自己推出下列的公式。 $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ 及和差與積互化公式 $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議

$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

其它有關公式亦可推出。

二倍角公式

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$\sin^2 A = \frac{1}{2}(1-\cos 2A)$

$\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$

26

三倍角公式

$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

半倍角公式

$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

內容	時間分配	教學建議

$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

教師應強調這些公式的應用。下列的例子可加闡釋：

例一

運用 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B}$，求證 $\tan\frac{\pi}{8}$ 是方程 $x^2+2x-1=0$ 的根，從而求出 $\tan\frac{\pi}{8}$ 的根式值。

27

例二

解方程 $\cos 2x + 2\cos^2\frac{x}{2} = 1$，其中 $0 \le x \le 2\pi$。

例三

試以 $\frac{\theta}{2}$ 表示 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$，由此求出

$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$， $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ 和

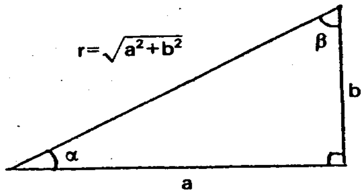
$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$， 其中 $t = \tan\frac{\theta}{2}$。

由此，解方程 $\frac{3\cos\theta + 4\sin\theta}{3-5\sin\theta} = 3$，其中 $0° \le \theta \le 180°$。

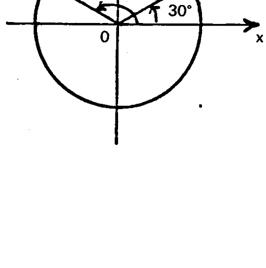
例四

求證 $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta = \frac{\sin 8\theta}{2\sin\theta}$，其中 $\sin\theta \ne 0$。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		教師可從這例子引導學生先去探究數式 $2\sin\theta(\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta)$ 及說明下列三角級數的和亦可用同樣的方法處理 $C = \cos\theta + \cos(\theta + \alpha) + \cos(\theta + 2\alpha) + \cdots + \cos(\theta + n\alpha)$ 和 $S = \sin\theta + \sin(\theta + \alpha) + \sin(\theta + 2\alpha) + \cdots + \sin(\theta + n\alpha)$ *例五* 解下列方程，其中 $0° \le \theta \le 360°$ ： (*a*) $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$ (*b*) $\cos 3\theta \cos 8\theta + \sin 4\theta \sin 7\theta = 0$
4.4 補助角的形式	~~2~~ 3	教師可要求學生將 $r\cos(\theta - \alpha)$化為 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 的形式。然後，學生應不難看出 $a = r\cos\alpha$ 和 $b = r\sin\alpha$。逆算時，數式 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 可寫作 $r\cos(\theta - \alpha)$ 的形式，其中 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ 及 $\tan\theta = \frac{b}{a}$。教師可用下面的直角三角形來闡明上述的概念：  教師應補充說明數式 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 亦可利用餘角 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 來寫為 $r\sin(\theta + \beta)$ 的形式。因正弦或餘弦函數的值只是由–1 至 1，學生應不難明白 $-r \le r\cos(\theta - \alpha) \le r$ 及 $-r \le r\sin(\theta + \alpha) \le r$ 。 教師可和學生討論 $y = a\cos\theta + b\sin\theta$ 圖像的形狀。可介紹類似下列的例子。

28

內容	時間分配	教學建議
		例一 (*a*) 若 $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = r\sin(\theta + \alpha)$ 其中 $r > 0$ 和 $0° \le \alpha \le 90°$，試求 r 及 α。 (*b*) 若 $y = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta + 7}$，利用(*a*)的結果，試求 y 值的值域。 *例二* 設 $f(\theta) = 12\sin\theta - 5\cos\theta + 8$ 。 (*a*) 試將 $f(\theta)$化為 $r\sin(\theta - \alpha) + c$ 的形式，其中 r，α和 c 是常數及 $0° \le \theta \le 90°$ 。 (*b*) 利用(*a*)部的結果，或其它方法，試求 $f(\theta)$的最小值。
4.5 三角方程的通解	~~4~~ 5	教師可要求學生列出方程 $\sin\theta = \sin 30°$ 的所有解。學生應知道$\theta = 30°$是 θ 的其中一個解，而 $180° - 30°$，$360° + 30°$，$540° - 30°$，… 是其他可能的解。 教師應引導學生去結合上述結果為兩組： $\theta = 2n(180°) + 30°$ 和 $\theta = (2n - 1)(180°) - 30°$ 及 簡化為單一的公式 $\theta = n \cdot (180°) + (-1)^n (30°)$，其中 n 是整數。 

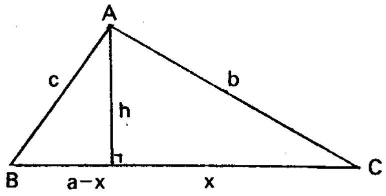
29

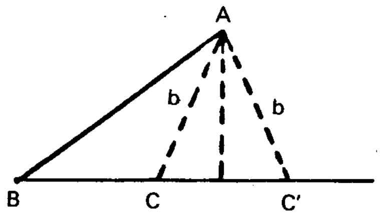
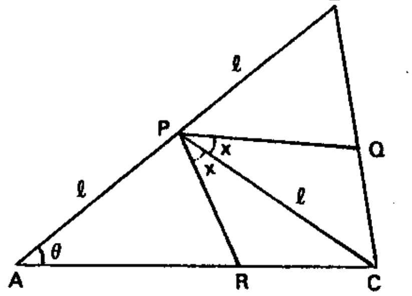
表示刪去的內容

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		在這階段，學生應不難知道 $\sin\theta=\sin\alpha$ 的通解是 $\theta = n\cdot(180°)+(-1)^n\alpha$。 教師應和學生討論如何求出 $\cos\theta=\cos\alpha$ 的通解和總結 $\theta = n\cdot(360°)\pm\alpha$。 同樣地，$\tan\theta=\tan\alpha$ 的通解是 $\theta = n\cdot 180° + \alpha$。 教師宜將上述三個結果同時以弧度表示。 $\theta = n\pi+(-1)^n\alpha$　　若 $\sin\theta=\sin\alpha$ $\theta = 2n\pi\pm\alpha$　　若 $\cos\theta=\cos\alpha$ $\theta = n\pi+\alpha$　　若 $\tan\theta=\tan\alpha$ 應提醒學生不要將弧度和度在同一公式中混合使用。他們可用反函數的記法，例如 $\theta = n\pi+(-1)^n\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ 來表示。 以下的例子可供參考。 *例一* 試求 $\cos^2 y=\frac{1}{2}$ 的通解。 從原式可得出 $\cos y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 而解是 $y=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 和 $2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$ 其中 n 是整數。對能力較高的學生，可重新安排答案如下： 對　$y=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$， 　　$y=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$，其中 k 是偶數或零。 對　$y=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$， 　　$y=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$，其中 k 是奇數。 聯合後，解為 $y=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$，其中 n 是整數。

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		例二 求 $2\cos\theta=\cot\theta$ 的通解。 學生或會忽略 $\cos\theta=0$ 是其中一個解。教師應提醒學生不要消去可能是零的因式。 *例三* 求 $\cos3\theta=\sin\theta$ 的通解。 可用正弦或餘弦的方法來解。用正弦的方法，可得 $\theta=180°n+(-1)^n(90°-3\theta)$ 及用餘弦的方法，可得 $3\theta=360°n\pm(90°-\theta)$。故利用餘弦的公式較易處理。 *例四* 求 $\sin2x+\sin4x=\cos x$ 的通解。 可利用恆等式 $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$， 將方程寫為 $2\sin3x\cos x=\cos x$ 的形式。 *例五* 求 $2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}=1$ 的通解。 可利用恆等式 $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$ 或 $\sin3A=3\sin A-4\sin^3 A$ 來解這方程。 *例六* 求 $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta=1$ 的通解。 解方程時，學生可先將 $\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta$ 化為 $r\sin(\theta+\alpha)$ 或 $r\cos(\theta-\alpha)$ 的形式。
4.6　三角形的解法	10*	有關解三角形的數學問題需要應用正弦和餘弦公式。對一任意銳角三角形 ABC，學生應不難利用下圖，推導出 $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ 和 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		 這些公式可伸延及應用於任意三角形，包括鈍角三角形。其次，正弦公式亦可由一個任意三角形及其外接圓推導出來。至於餘弦公式，除了運用畢氏定理外，亦可從下列三恆等式中推出。 $a = b\cos C + c\cos B$ $b = a\cos C + c\cos A$ $c = b\cos A + a\cos B$ 在這情況下，學生應注意畢氏定理是餘弦公式的特殊情況。 應提供學生足夠的例子及習作。解三角形的習作亦應包括下列的情況： (1) 任意兩個角和一條邊 (2) 任意兩條邊及其中一邊的對角 (3) 任意兩條邊及其夾角 (4) 任意三條邊 學生應能選擇及應用適合的公式。教師亦應利用例子詳加解釋兩義情況。下圖對此會有幫助。

內容	時間分配	教學建議
		 $c>b>c\sin B$
4.7 二維及三維空間問題	~~4~~ 6	教師應介紹較艱深的問題，包括有關複角及任意三角比的問題。 應鼓勵學生在解問題前，先描繪有關圖形。金屬線模型或立體模型對解釋及說明會有幫助。 足夠的例子及練習可幫助學生掌握解有關問題的技巧。 *例一* 在下圖，ABC 是一三角形而 $\angle A = \theta$。P 是在 AB 的點而 PA = PB = PC = ℓ。R 及 Q 是分別在 AC 及 BC 的點，而 $\angle QPC = \angle RPC = x$。 

表示刪去的內容

<table>
<tr><th>內 容</th><th>時 間
分 配</th><th>教 學 建 議</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>

(*a*) 試證 $PR = \dfrac{\ell \sin\theta}{\sin(x+\theta)}$。

(*b*) 試以 θ 表 ∠PCQ 並由此以 ℓ、x、θ 表 PQ。

(*c*) 試證 ΔPQR 的面積為 $\dfrac{\ell^2 \sin\theta\cos\theta\sin 2x}{2\sin(x+\theta)\cos(x-\theta)}$，且該面積可表示成

$\dfrac{\ell^2 \sin 2\theta}{2}\left(1-\dfrac{\sin 2\theta}{\sin 2x+\sin 2\theta}\right)$。 .... (*)

(*d*) (i) 若 $\theta=\dfrac{\pi}{8}$，求 x 值的可能範圍。由此，利用(*)推出 ΔPQR 的極大面積，並以 ℓ 表之。

(ii) 若 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$，x 值的可能範圍為何？

試以 ℓ 表 ΔPQR 的極大面積。

例二

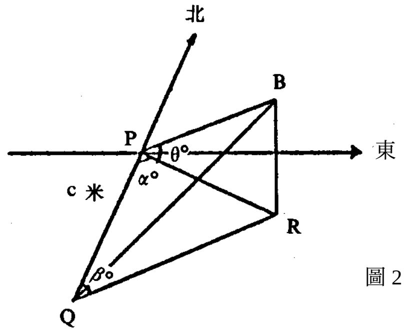


圖 2

</td></tr>
</table>

34

<table>
<tr><th>內 容</th><th>時 間
分 配</th><th>教 學 建 議</th></tr>
<tr><td></td><td>

~~16*+24~~
18*+28</td><td>

一汽球 B 由平地上兩點 P、Q 同時觀察，P 在 Q 的北面及相距 c 米。從 P 及 Q 兩點測得汽球的方位角分別為 Sα°E 及 Nβ°E。從 P 點測得 B 的仰角為 θ°。R 是 B 點在地上的投影(見圖)。

(*a*) 試證當汽球在高度 h 米時，

$h = \dfrac{c\tan\theta^\circ \sin\beta^\circ}{\sin(\alpha^\circ+\beta^\circ)}$。

(*b*) 已知 θ = 40，α = 54 及β = 46，

(i) 試求從 θ 點測得 B 的仰角 ；

(ii) 設 M 是 PQ 的中點，試求從 M 點測得 B 的仰角和方位角。

</td></tr>
</table>

35

表示刪去的內容