內容	時間分配	教學建議
		一個常用以證明 $x > y$ 的方法是證明不等式 $x - y > 0$ 能夠成立。 用以上兩個事實，教師可和學生討論一些簡單的絕對不等式，例如：$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$
	~~3* + 9~~ 3* + 4	

60

單元 **7**：解析幾何

特定目標：

1. 求坐標平面上直線圖形的面積。
2. 求兩直線的交角。
3. 了解直線的法線式，並利用有關知識計算距離。
4. 求圓的方程及圓與直線的交點。
5. 求圓的切線方程。
6. 求直線族及圓族的方程。
7. 求在標準位置上拋物線、橢圓及雙曲線的方程。
8. 獲取參數方程與軌跡的概念，及解簡易軌跡問題。

61

內容	時間分配	教學建議
7.1 平面直角坐標及兩點間的距離	1*	因為學生在中一至中三階段應已學習平面直角坐標的基本概念，所以現在只需作簡單溫習。教師可說明距離公式及截點公式，當談及截點公式時，教師應強調外分點，即若 R 是 PQ 延線上一點，而 PR：RQ＝r：1，則 r 將為負數。 *例* 某圓的圓心為 O(3, 4)。若 A(1, 1)是該圓某一直徑的端點，求另一端點的坐標。
7.2 直線圖形的面積	3	學生應在引導下發現頂點為 O(0, 0)，$A(x_1, y_1)$及 $B(x_2, y_2)$的三角形的面積可被寫成兩直角三角形及一梯形面積的代數和，答案是 $\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$。學生亦應留意到若頂點 O、A 及 B 以逆時針方向選出，則所得是一正數；否則，則得一負數。 擁有以上知識，則任何坐標平面上的三角形可被視為三個包括原點為頂點的三角形的代數和，因此可用下列公式計算：

表示刪去的內容

62

內容	時間分配	教學建議

三角形的面積

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

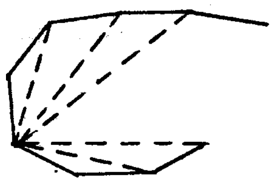
其中(x_1, y_1)，(x_2, y_2)及(x_3, y_3)是根據逆時針方向定出的三角形頂點的坐標。

教師應告訴學生，為了方便起見，以上公式可寫成

$$\text{三角形的面積} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

其中 x_1y_2，x_2y_3 及 x_3y_1 被視為聯線向下的積，帶正值；x_2y_1，x_3y_2 及 x_1y_3 被視為聯線向上的積，帶負值；而面積則為所有數項總和的一半。

最後，任何平面上的 n 邊形，可被視為 $(n-2)$ 個三角形所組成，如下圖：



由此，可得下列公式：

多邊形的面積

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - \cdots - x_1y_n)$$

其中(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$(x_3, y_3)\ldots(x_n, y_n)$是根據逆時針方向定出的頂點坐標。

同樣，為了方便起見，學生可將公式寫成

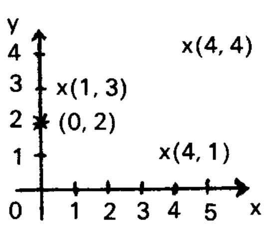
63

內容	時間分配	教學建議

$$\text{多邊形的面積} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

在練習中，譬如求頂點為 (1, 3)，(4, 1)，(4, 4) 及 (0, 2) 的四邊形面積，教師應經常提醒學生公式內各點一定是根據逆時針方向排列的。由此，上述多邊形的面積是

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 4 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{而非} \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 4 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$



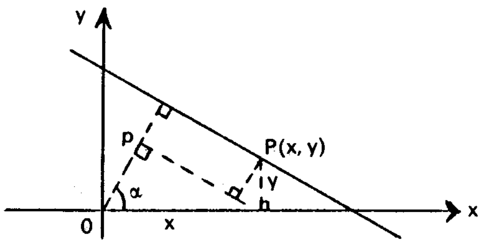
在應用公式前畫一草圖是合乎需要的。

表示刪去的內容

64

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
7.3 直線的傾角及斜率	1*	直線斜率的定義應為該直線對正 x 軸的傾角的正切，而傾角的範圍是 0°至 180°。 因此，連接 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 兩點直線的斜率是 $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 。
7.4 兩直線的交角	~~3~~ 4	已知兩直線對正 x 軸的傾角分別為 α和β, 則兩直線的交角等於 α和 β的差 因為 $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$ $= \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$, 所以兩直線的交角是 $\tan^{-1}\left\lvert\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right\rvert$ 。 公式中的絕對值符號保証所得的角是兩直線間的銳角。 至此，學生應不難理解斜率分別為 m_1 及 m_2 的直線平行 (即兩線之交角 $\theta = 0°$)當且僅當 $m_1 = m_2$ ；另外，兩線垂直（即 $\theta = 90°$）當且僅當 $m_1 m_2 = -1$。 *例* 直線 $x + y = 5$ 與 $2x - y = 7$ 間之銳角是 $\tan^{-1}\left\lvert\dfrac{-1-2}{1+(-2)}\right\rvert = 71.6°$ 。
7.5 直線的方程	1*	教師應對學生強調一直線的方程實際上是直線上任意一點的 x 與 y 坐標的關係。直線方程的標準式包括 (1)一般式 (2)兩點式 (3)點斜式 (4)斜截式 (5)截距式

65

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
7.6 法線式	5	學生應在教師指導下，利用直線與原點的距離 $p(p > 0)$，和直線的法線對正 x 軸的傾角α，寫出直線的法線式。 (當 p＞0，則 $0 \le \alpha < 2\pi$, 當 p＝0，則 $0 \le \alpha < \pi$)  根據上圖，學生不難證明直線上任何一點 P 的坐標(x, y)滿足關係 $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ 這便是直線方程的法線式。 已知一直線方程的一般式是 $Ax + By + C = 0$ ，學生應懂得將它化為法線式方程 $\dfrac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$ 及了解以下的對應： $\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\alpha$ $\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\alpha$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		$\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = -p$ 選擇適當的分母符號的規則是 (1) 若 $C \neq 0$，則分母的符號與 C 的符號相反。 (2) 若 $C = 0$，則分母的符號與 B 的符號相同。 *例* 直線 $x-\sqrt{3}y+6=0$ 可轉換為 $\dfrac{x-\sqrt{3}y+6}{-2}=0$；由此，$p=3$，及 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\alpha=120°$。 另外一種方法，是將方程 $Ax+By+C=0$ 重新排列，使右邊留下一正常數，再在方程兩邊各除以 $\sqrt{A^2+B^2}$。例如上述方程可重新排列成 $-x+\sqrt{3}y=6$ 繼而 $\dfrac{-x+\sqrt{3}y}{\sqrt{(-1)^2+3}}=\dfrac{6}{\sqrt{(-1)^2+3}}$ 或 $-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=3$ 得 $p=3$，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 和 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，與剛才所得的相同。 求一已知點至一直線的距離，可考慮和該直線平行且過已知點(x_0, y_0)的直線的法線式。學生應記憶公式 $d=\dfrac{Ax_o+By_o+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$。 學生亦應注意到如果適當選擇公式中分母的符號，則由公式計算出來的數值記號，可顯示該已知點是否和原點在已知直線的同一邊。若求絕對值距離，則可取所得數量的絕對值。

內容	時間分配	教學建議
		對能力較高的學生，可以例題方式討論兩平行線的距離和兩相交直線的角平分線的基本處理方法，藉以提高他們的興趣。 *例一* 求平行線 $12x-5y-10=0$ 及 $12x-5y+16=0$ 之間的距離。 選擇其中一條線上任何一點，這點至另一直線的距離，即為兩平行線的距離。假設選擇了第一條線上的點 $(0, -2)$，該點至第二條線的距離是 $\dfrac{(-5)(-2)+16}{\sqrt{12^2+5^2}}=2$，這就是該兩條線的距離。 *例二* 求直線 $x+y-3=0$ 和 $x-7y+5=0$ 的角平分線。 設 $P(x, y)$為角平分線上的一點。則由 P 至兩直線的距離相等。因此， $\left\|\dfrac{x+y-3}{\sqrt{1^2+1^2}}\right\|=\left\|\dfrac{x-7y+5}{\sqrt{1^2+7^2}}\right\|$ 得 $x+3y-5=0$ 或 $3x-y-5=0$；它們就是兩已知直線的角平分線方程。
7.7 直線族	~~3~~ 5	這課題包括斜率為 m 的平行線族，通過已知點 (a, b) 的直線族，及通過直線 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交點的直線族。它們的方程分別為 $y=mx+c$， $y=k(x-a)+b$ 及$(A_1x+B_1y+C_1)+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$。在每一種情況，直線族的方程都含有一個參數 k。 (註：直線族方程$(A_1x+B_1y+C_1)+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$ 並不包括直線 $A_2x+B_2y+C_2=0$。) 故此，教師可利用方程 $\ell(A_1x+B_1y+C_1)+k(A_2x+B_2y+C_2)=0$，其中$\ell$、k 為參數，藉以包括所有通過直線 $A_1x+B_1y+C_1=0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交點的直線。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		例一 與直線 $2x-3y+4=0$ 平行的直線族的方程是 $2x-3y+h=0$。 通過點(2, 3)的直線族方程是 $y=k(x-2)-3$，其中 h 和 k 為參數。 *例二* 求通過直線 $2x+y-1=0$ 和 $3x-2y-5=0$ 的交點及距離原點 1 單位的直線。 該直線的方程是 $(2x+y-1)+k(3x-2y-5)=0$，其中 k 為參數。k 同時應滿足 $\frac{-1-5k}{\sqrt{(2+3k)^2+(1-2k)^2}}=1$。
7.8 軌跡的概念	~~1*+1~~ 1*+3	教師應盡量利用實際例子說明軌跡的概念，例如日常生活上移動的點、線、面積和物體所經的軌道，如像火車沿著鐵軌所經過的路程，在滾動中的圓柱體邊緣的點所描繪的路線及足球在空中移動的軌跡。教師更可引領學生進行一些簡單軌跡的幾何作圖的活動。 教師應指出直線是一平面上的軌跡例子，而它並可以以直線方程在笛卡兒平面上表示出來。 *例* 已知兩固定點 A(1, 0)及 B(0, 3)，若一點 P 移動時，其至點 A 和點 B 的距離相等，試求 P 點的軌跡方程。 利用條件 PA＝PB 便可求出一直線方程。學生應能認識到在直線上任何一點的坐標必定滿足該直線方程，而直線的方程則決定直線在平面上的位置。
7.9 圓的方程，圓與直線的交點	~~7*~~ 8*	學生在引導下利用距離公式找出圓心在原點，半徑左 r 的圓的方程。舉出適當的例子後，學生應能推出方程的形式為 $x^2+y^2=r^2$。 已知上述形式的方程，學生應認識到它是代表一個圓心為原點及半徑為 r 的圓。 之後，教師可考慮一般的情況，例如，圓心不在原點而在點(h, k)。透過足夠的練習後，學生會發現圓的方程可寫成下列其中一種形式：

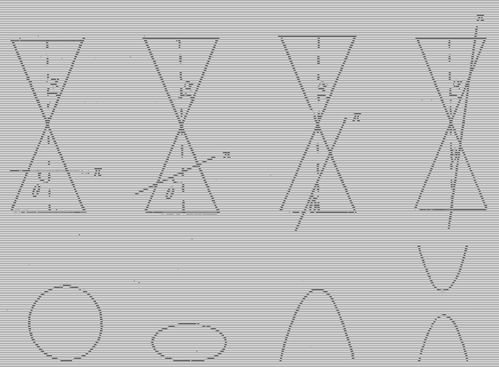
內容	時間分配	教學建議
		$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 或 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 已知上述一種形式的方程，學生應知道它代表一個圓，同時亦應知道圓心的位置及半徑的長度。 應加以討論通過三非線性點的圓的方程。 直線與圓是否一定相交於兩點呢？教師應與學生討論所有情況，並應連同二次方程的根一起討論，尤其是當二次方程有二重根。幾何中切線的概念可以代數條件 $b^2-4ac=0$ 來表示。 教師應提供學生適當的例子，而下列的例子可作為參考。 *例一* 一圓的直徑的兩端點分別為 $A(x_1, y_1)$及 $B(x_2, y_2)$，試求此圓的方程。 例二 設 ΔABC 的頂點分別為 A(–6, 5)，B(–3, 4) 及 C(2, 1)。試求ΔABC 的外接圓的方程。 *例三* 直線 $L: x-y-2=0$ 是否與圓 $C: x^2+y^2-4x-2y+4=0$ 相交？並說出理由。
7.10 圓的切線方程	~~4~~ 5	已知一圓的方程為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，教師應引導學生推出通過圓上一已知點(x_1, y_1)的切線的方程，微分法的技巧在這裏會有幫助。學生應找出該切線的方程為 $x_1x+y_1y+\frac{1}{2}D(x+x_1)+\frac{1}{2}E(y+y_1)+F=0$。 之後，教師可考慮一般的情況，如求出從圓外一點作一已知圓的切線的方程。教師應對學生顯示如何透過解通過圓外一些的直線的方程和圓的方程而求出該圓的切線方程。 可與學生進一步討論如何以圓心至切線的距離等於半徑的事實求切線方程。

表示刪去的內容

70

內容	時間分配	教學建議
		例一 求證 A(1, 4)在圓 C: $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ 上。由此，求在點 A 對 C 的切線方程。 *例二* 求平行於直線 $2x+y+3=0$ 而與圓 $x^2+y^2+6x-2y+5=0$ 相切的直線方程。 *例三* 由點 M(–4, 4)至圓 C: $x^2+y^2-6x-6y-7=0$ 的兩切線切圓於 P 和 Q。 求 (*a*) 兩切線的方程； (*b*) ∠PMQ； (*c*) 每一條切線段的長度； (*d*) ΔMPQ 的面積。
7.11 圓族	~~4~~ 5	學生應該知道利用圓族的方程可以化簡一些問題的解答方法。教師應與學生討論以下三種情形： (1) 以 (a, b) 為圓心的同心圓族。 方程為 $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ $(k>0)$ (2) 經過直線 $Ax+By+C=0$ 和圓 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的交點的圓族。 方程為 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+k(Ax+By+C)=0$ (3) 經過兩個圓的交點的圓族。 兩個圓的方程分別為 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 及 $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 而圓族的方程為 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$ 其中 $k\neq-1$。教師應解釋當 $k=-1$ 時上述方程為該兩圓的公弦之方程。同時，若兩圓互切，該公弦將會變成兩圓的公切線。 教師可介紹以下的例子。

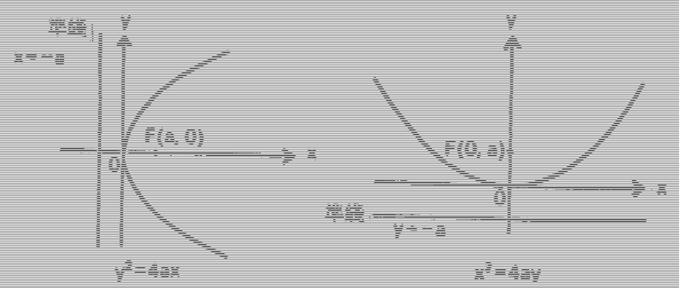
71

內容	時間分配	教學建議
		例一 求證方程 $x^2+y^2-4x+2y+F=0$，其中 F 為一常數，代表一同心圓族。 *例二* 一圓過直線 $x+y=1$ 與圓 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ 的交點。若它的圓心在直線 $3x-y=3$ 上，求這圓的方程。 *例三* 一圓 C 過點 Q(1, 2)及圓 $x^2+y^2-3x+2y-2=0$ 與 $x^2+y^2+x+3y-10=0$ 的交點，試求圓 C 的方程及與 C 相切於 Q 的切線方程。
7.12 標準位置上的拋物線、橢圓及雙曲線	7	圓錐曲線模型可以有效地介紹圓錐曲線的概念。學生亦應能想像圓錐曲線的形狀及它們如何形成。 用一平面π去切截兩直立圓錐體，所得的曲線就稱為圓錐曲線。若平面π與圓錐體的軸所成交角為 θ，根據 θ 的大小可得以下四種不同的曲線： 

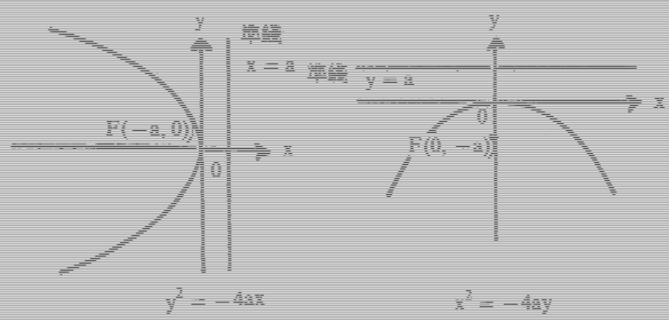
表示刪去的內容

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		(*a*) 當 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 時，則形成一圓。 (*b*) 當 $\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$ 時，則形成一橢圓。 (*c*) 當 $\theta=\alpha$ 時，則形成一拋物線。 (*d*) 當 $0<\theta<\alpha$ 時，則形成一雙曲線。 教師應利用教具去說明圓錐曲線的概念。
7.12.1 *拋物線*	3	學生應熟習拋物線的定義：平面上一個動點到一固定點及到一固定直線的距離恆等，則此動點的軌跡被稱為拋物線。 教師應引導學生推算拋物線的標準方程 $y^2=4ax$，及強調曲線的對稱性質和 y 的定義域，而名詞「焦點」，亦應予以介紹。 以下的圖像有效說明拋物線的四個不同位置，它們的頂點都是原點及其軸都是坐標軸。

72



內 容	時 間 分 配	教 學 建 議



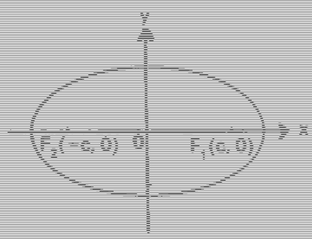
內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
		對能力較高的學生，可以介紹焦點和準線的簡易性質。 要求學生根據已知焦點或準線方程來找出拋物線方程的例子是必須的，如下的具體例子可以加深學生的了解能力。 *例一* 描繪拋物線 $x^2=-6y$ 的圖像，並求焦點的坐標及準線方程。 *例二* 求以原點為頂點，以坐標軸為對稱軸，且過點(−6, 3)的拋物線方程。 對能力較高的學生，可以介紹拋物線方程的非標準形式如 $y^2=4a(x-h)$ 或 $x^2=4a(y-k)$。
7.12.2 *橢圓*	3	橢圓的標準方程可從定義推導出來：平面上一動點至兩個固定點的距離的和為一常數，則此動點的軌跡稱為橢圓。教師應要介紹名詞「焦點」、「長軸」、「半長軸」、「短軸」及「半短軸」，同時亦應討論 a、b 和 c 的幾何意義；而關係式 $a^2=b^2+c^2$（其中 a > b 及 a > c）亦要說明。 可利用圖像與學生討論長軸在 x 軸或 y 軸上而中心在原點的不同情況。

73

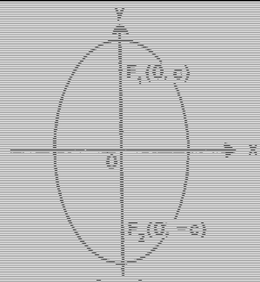
表示刪去的內容

74

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議



$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$



$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

對能力較高的學生，可以介紹焦點和準線的簡易性質。

學生應認識到要找出橢圓的標準方程，必須知道下列其中兩個條件：長軸的長度、短軸的長度兩個焦點其中一個的坐標。

例一

試求下列各橢圓的焦點及頂點，並描繪它們的圖像：

(*a*) $4x^2+9y^2 = 36$
(*b*) $25x^2+y^2 = 25$

例二

試求中心在原點，且滿足下列已知條件的各橢圓方程：

(*a*) 一焦點為(-3, 0)，一頂點為(0, 5)。
(*b*) 半長軸的長度等於 12，兩焦點間的距離等於 6，而焦點在 x 軸上。
(*c*) 一頂點為(5, 0)，且過點(4, 2)。

例三

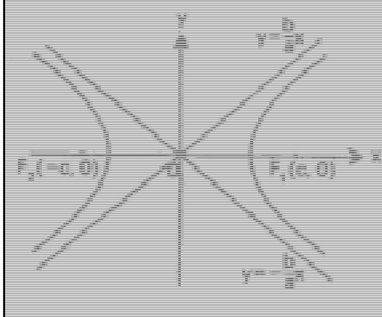
求與直線 $3x-2y=0$ 平行且與橢圓 $4x^2+y^2=16$ 相切的兩直線的方程。

75

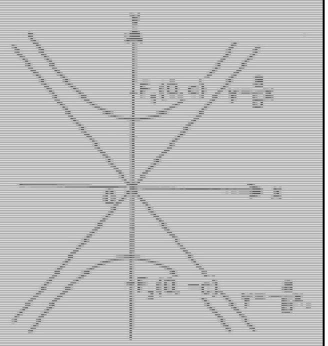
內 容	時 間 分 配	教 學 建 議
7.12.3 *雙曲線*	3	

雙曲線的標準方程可從定義推導出來：平面上一動點至兩個固定點的距離的差為一常數，則此動點的軌跡稱為雙曲線。學生應知道 a 及 c 的幾何意義；而關係式 $a^2+b^2=c^2$ (其中 $a<c$) 亦應介紹；從關係式中可清楚知道 a 未必大過 b。

教師可利用圖像清楚介紹名詞如「焦點」、「貫軸」、「半貫軸」、「共軛軸」、「半共軛軸」。學生亦應要認識以下以原點為中心及分別以 x 軸和 y 軸為貫軸的兩個圖像。



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

利用漸近線描繪雙曲線是一有效方法，而學生應要掌握其幾何意義。

對能力較高的學生，可以介紹焦點的簡易性質。

學生應認識到要找出雙曲線的標準方程，必須知道下列其中兩個條件：貫軸的長度、共軛軸的長度及兩個焦點其中一個的坐標。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		例一 求雙曲線 $9x^2 - y^2 = 9$ 的頂點、焦點及漸近線的方程，並描繪它的圖像。 *例二* 雙曲線的貫軸和共軛軸的長度分別為 8 和 10，若中心在原點及焦點在 y 軸上，求它的方程。 *例三* 試求過橢圓 $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$ 右則的焦點，且和圓 $x^2 + y^2 = 9$ 相切的直線方程。 對於能力較高的學生，可以介紹等軸曲線。
7.13 簡易的參數方程及軌跡問題	~~4~~ 5	參數方程是一表示曲線方程的一個方法。而在曲線上任一點 (x, y) 都可和參數 t 相關。 教師可說明如何利用消去法將參數方程轉換為方程 f(x, y)=0。例如，$x = at^2$ 及 $y = 2at$ 可以寫成 $y^2 = 4ax$，而此方程為一拋物線。 學生應認識直線及圓形~~錐曲線~~的參數方程，而且，教師應強調一個函數 f(x, y)=0 可以有多個的參數表示方法。 教師應提供學生一些牽涉以參數形式表示軌跡的問題，用以幫助他們熟習有關的概念及技巧。以下是一些例子。 *例一* 從下列的參數方程得出關於 x 和 y 的方程： (*a*) $x = t^2 - 2t$，$y = t^2 + 2$。 (*b*) $x = \tan\alpha + \cot\alpha$，$y = \tan\alpha - \cot\alpha$。 *例二* 利用 $y = tx$，試求曲線 $x^3 + y^3 = 6xy$ 的參數方程。 *例三* 已知曲~~拋物~~線的方程為 $y^2 = 4ax$。

76

內容	時間分配	教學建議
		(*a*) 求證 $P_1(at_1^2, 2at_1)$ 和 $P_2(at_2^2, 2at_2)$ 皆為此曲~~拋物~~線上的點。 (*b*) 若 M 為 P_1P_2 的中點，試以 t_1 和 t_2 表點 M 的坐標。 (*c*) 設 O 為原點，若 OP_1 垂直於 OP_2，試求點 M 的軌跡方程。
	~~11*+39~~ 12*+35	

77

表示刪去的內容