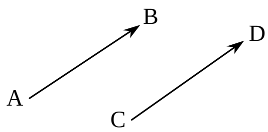
單元 **8**：　　　二維空間的向量

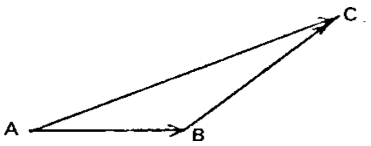
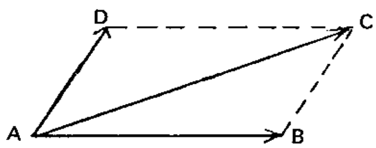
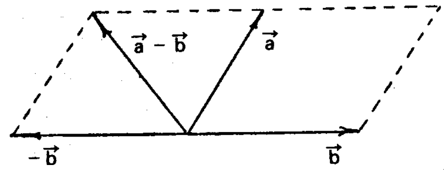
*特定目標：*

1. 學習向量的概念及表示法。
2. 學習二維空間向量的某些性質及運算。
3. 理解二維空間向量的幾何表示法。
4. 應用向量方法解某些幾何問題。

78

| 內 容 | 時 間<br>分 配 | 教 學 建 議 |
|---|---|---|
| **8.1** 純量及向量、向量相等、零向量及單位向量 | ~~2~~<br>3 | 教師可利用純量的例子，如質量、長度、時間、溫度等，以及向量(或稱矢量)的例子，如力、位移、速度、加速度等說明純量與向量兩者間的分別。<br><br>向量的幾何表示法(即以有向線段表示向量)有助於學生對向量的直觀認識，宜盡早引入。學生須認識課本印刷時採用的向量符號(如 **a**、 $\overrightarrow{AB}$ 等)以及書寫時採用的符號(如 $\vec{a}$ 、 $\underline{a}$ 等)；表示向量大小的符號分別是│**a**│、│$\overrightarrow{AB}$│、│$\vec{a}$│、│$\underline{a}$│。教師須使學生養成在字母上加上箭號 ($\rightarrow$) (例如 $\vec{a}$ ) 或在字母下加線(例如 $\underline{a}$ )以表示向量的習慣。<br><br>教師須強調若兩向量的大小與方向都相同，則兩向量相等。例如，若 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ，則│$\overrightarrow{AB}$│=│$\overrightarrow{CD}$│，且 AB//CD。<br><br><br><br><br>之後教師可引入大小是零而無特定方向的零向量，一般記作 $\vec{0}$ 或 $\underline{0}$。介紹單位向量時，教師可定為長度為 1 的任何向量。單位向量常用以表示方向。 |

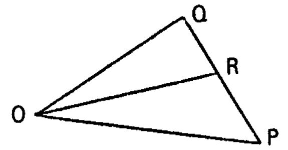
79

| 內 容 | 時 間<br>分 配 | 教 學 建 議 |
|---|---|---|
| **8.2** 向量的和及差、純量與向量相乘 | ~~3~~<br>4 | 向量的加法最宜以三角形定律說明，其圖示法如下：<br><br><br><br><br>$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$<br><br>亦可用平行四邊形定律<br><br><br><br><br>$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$<br><br>教師可用兩個位移的向量和兩個力的合力或兩個速度的合速度作為實例。亦可教授多邊形定律，作為三角形定律的引申。<br><br>兩向量的差 $\vec{a}-\vec{b}$ 可視作兩向量的和 $\vec{a}+(-\vec{b})$。<br><br><br><br><br>教師可介紹純量與向量的積的幾何意義，並應指出若 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ ，則 $\overrightarrow{AB}$ 平行於 $\overrightarrow{CD}$ ；且│$\overrightarrow{AB}$│=│$k\overrightarrow{CD}$│；若 $k>0$ ，則 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 同向；若 $k<0$，則 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 反向。在教師指導下，學生利用圖示法不難發現以下法則： |



表示刪去的內容

80

| 內 容 | 時 間<br>分 配 | 教 學 建 議 |
| --- | --- | --- |
| | | $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$<br>$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$<br>$r(s\vec{u})=(rs)\vec{u}=s(r\vec{u})$<br>$(r+s)\vec{u}=r\vec{u}+s\vec{u}$<br>$r(\vec{u}+\vec{v})=r\vec{u}+r\vec{v}$<br>教師可舉出以下各例：<br>*例一*<br>ABCD 是正方形，X、Y 是 BC、CD 的中點。<br>若 $\overrightarrow{AX}=\vec{p}$， $\overrightarrow{AY}=\vec{q}$，<br>(*a*) 以 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{BC}$ 表 $\vec{p}$ 及 $\vec{q}$；<br>(*b*) 以 $\vec{p}$ 及 $\vec{q}$ 表 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{BC}$。<br>*例二*<br>若 ABCD 是平行四邊形，證明<br>(*a*) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{DB}$；<br>(*b*) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{AD}=\vec{0}$。<br>*例三*<br>圖中 mPR = nRQ，其中 m、n 是正常數，證明 $m\overrightarrow{OP}+n\overrightarrow{OQ}=(m+n)\overrightarrow{OR}$。<br><br> |

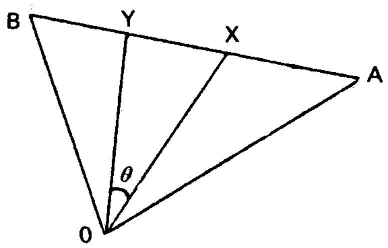
81

| 內 容 | 時 間<br>分 配 | 教 學 建 議 |
| --- | --- | --- |
| **8.3** 向量在直角坐標系的表示法 | ~~2~~<br>3 | 教師應先教授單位向量 $\vec{i}$、$\vec{j}$，然後利用實例，解釋如何以 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 表示直角坐標面內的任一向量。對任一向量 $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ 其大小是 $\lvert\vec{u}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$，而方向 $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$。考慮(x, y)點所在的象限可定出向量與正 x 軸間的角θ。例如向量 $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ 的大小是 $\lvert\vec{u}\rvert=\sqrt{2}$，方向是 $\theta=\tan^{-1}(1)=45°$，而向量 $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$ 的大小是 $\lvert\vec{v}\rvert=\sqrt{2}$，方向是 $\theta=\tan^{-1}(-1)=315°$。教師此時可在直角坐標系的函義內重溫兩向量的相等、和及差等觀念的意義，並給予足夠的練習。 |
| **8.4** 兩向量的純量積 | ~~4~~<br>5 | 學生熟習 $\vec{u}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ 及 $\vec{v}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ 的表示方法後，可學習兩向量的純量積（亦稱點積）的定義。<br>$\vec{u}\cdot\vec{v}=\lvert\vec{u}\rvert\lvert\vec{v}\rvert\cos\theta$，其中 θ 是 $\vec{u}$，$\vec{v}$ 之間的角，而 $\vec{u}$，$\vec{v}\neq\vec{0}$。<br>$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ 若 $\vec{u}=\vec{0}$ 或 $\vec{v}=\vec{0}$。<br>利用 $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=1$， $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=0$，亦可得出另一定義<br>$\vec{u}\cdot\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2$。教師須提醒學生在表示點積時須用點「·」。<br>教師可引導學生推出下列純量積的性質：<br>$\vec{u}\cdot\vec{u}=\lvert\vec{u}\rvert^2$<br>$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$<br>$k(\vec{u}\cdot\vec{v})=(k\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(k\vec{v})$<br>$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$<br>當學生熟悉兩向量相等當且僅當兩者有相同的 $\vec{i}$、$\vec{j}$ 分量這個觀念，教師可將這觀念推廣至以兩個不平行的向量 $\vec{u}$、$\vec{v}$ 表示的向量。直觀上，學生不難理解若 $a_1\vec{u}+b_1\vec{v}=a_2\vec{u}+b_2\vec{v}$，則 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$。教師可舉例說明，但無須教授基的正式定義。下列例題可作練習： |



表示刪去的內容

82

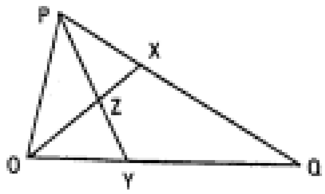
| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
| --- | --- | --- |
| | | *例一*<br>已知三點 A(1, 3)，B(−2, 4)，C(−1, 5)，<br>(*a*) 以 $\vec{i}$ 及 $\vec{j}$ 表 $\overrightarrow{BA}$ 及 $\overrightarrow{BC}$，<br>(*b*) 求 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，及<br>(*c*) 求 ∠ABC (準確至 0.1°)。<br><br>*例二*<br>圖中，AX = XY = YB。<br><br>若 $\overrightarrow{OA}=\vec{i}-\vec{j}$，$\overrightarrow{OB}=10\vec{i}+5\vec{j}$，<br>(*a*) 以 $\vec{i}$ 及 $\vec{j}$ 表 $\overrightarrow{OX}$ 及 $\overrightarrow{OY}$，<br>(*b*) 求 $\lvert\overrightarrow{OX}\rvert$ 及 $\lvert\overrightarrow{OY}\rvert$，及<br>(*c*) 求 cosθ 的值。<br><br>*例三*<br>已知 $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}-4\vec{j}$，$\overrightarrow{AC}=a\vec{i}-12\vec{j}$，$\overrightarrow{AB}=-8\vec{i}+b\vec{j}$<br>(*a*) 若 A、B、C 共線，求 a；<br>(*b*) 若 AD ⊥ AB，求 b。 |

83

| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
| --- | --- | --- |
| **8.5** 向量的應用、線段分點、平行及垂直 | ~~3~~<br>5 | 向量方法可應用於解答課程內其他課題的問題，例如解析幾何及三角。<br>以某點的位置向量這個概念為開始，教師可引導學生得出以比 m：n 分割線段 AB 的點的位置向量<br>$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{m+n}\left(n\vec{a}+m\vec{b}\right)$，<br>其中 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ 及 $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ 分別是 A 及 B 的位置向量。<br>在三角學上，教師可利用點積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 及 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 引導學生得出餘弦公式 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，學生亦須熟悉以下事實：<br>(1) 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，則 AB ⊥ BC。<br>(2) 若 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$，則 AB // CD。<br>(3) 若 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$，A、B、C 共線。<br>利用向量方法證明幾何學上某些重要結果的例子甚多，例如，<br>(1) 連接某三角形兩邊中點的線段必平行於第三邊，其長度且等於第三邊的一半。<br>(2) 連接某圓的圓心及圓上一弦的中點的線段必垂直於該弦。<br>(3) 半圓的圓周角為直角。<br>(4) 菱形的對角線互相垂直平分。<br>(5) 三角形的三條高線共點。<br>(6) 三角形的三條中線共點。<br>下列為另類練習例子。<br>*例一*<br>圖中，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$，$\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$，$2\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{XQ}$，$3\overrightarrow{OY}=2\overrightarrow{YQ}$。 |



表示刪去的內容

| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
|---|---|---|
| | | (*a*) 以 $\vec{p}$ 及 $\vec{q}$ 表 $\overrightarrow{OX}$ 。<br>(*b*) 若 $\overrightarrow{OZ} = \lambda\overrightarrow{OX}$， $\overrightarrow{PZ} = \mu\overrightarrow{PY}$，證明 $5\lambda - 6\mu = 0$ 且 $2\lambda + 3\mu - 3 = 0$ 。<br>(*c*) 試解 $\lambda$ 以求 PZ : PY。<br><br><br>*例二*<br>證明若 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 為任意向量，則<br>(*a*) $\lvert\vec{u}\cdot\vec{v}\rvert \le \lvert\vec{u}\rvert\,\lvert\vec{v}\rvert$，<br>(*b*) $\lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert \le \lvert\vec{u}\rvert + \lvert\vec{v}\rvert$ 。 |
| | ~~14~~ 20 | |

84

單元 **9**：積分法

*特定目標：*

1. 認識不定積分法為微分法的逆運算。
2. 理解不定積分的性質。
3. 認識不定積分法在幾何及物理上的一些應用。
4. 認識及應用不定積分法的標準公式與及代換法。
5. 理解以定積分作為一個總和的極限的基本原理。
6. 理解及應用定積分的基本性質。
7. 應用定積分去求平面面積及旋轉體體積。

| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
|---|---|---|
| **9.1** 不定積分 | ~~1~~ 2 | 不定積分可以求導數的逆運算作為介紹，並引出下列簡易性質：<br>$\int (u \pm v)dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$<br>及 $\int ku\,dx = k\int u\,dx$<br>介紹「原函數」、「積分符號」、「被積函數」及「積分常數」等名詞。教師應強調積分 $\int u\,dx$ 僅為一個符號而並不代表把 u 乘以 dx。 |
| **9.2** 函數的積分法及簡易應用 | ~~4~~ 5 | 應提供適量例題及練習，使學生熟習下列積分公式：<br>$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \ne -1)$<br>(應加以討論 $n = 0$ 的情形)<br>$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$<br>$\int \cos x\,dx = \sin x + C$<br>$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$<br>$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$<br>$\int \mathrm{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$ |

85



表示刪去的內容