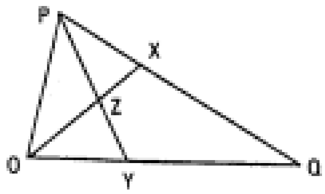
內容	時間分配	教學建議
		(*a*) 以 $\vec{p}$ 及 $\vec{q}$ 表 $\overrightarrow{OX}$。 (*b*) 若 $\overrightarrow{OZ} = \lambda\overrightarrow{OX}$， $\overrightarrow{PZ} = \mu\overrightarrow{PY}$，證明 $5\lambda - 6\mu = 0$ 且 $2\lambda + 3\mu - 3 = 0$。 (*c*) 試解 λ 以求 PZ : PY。  *例二* 證明若 $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$ 為任意向量，則 (*a*) $\lvert\vec{u} \cdot \vec{v}\rvert \le \lvert\vec{u}\rvert \lvert\vec{v}\rvert$， (*b*) $\lvert\vec{u} + \vec{v}\rvert \le \lvert\vec{u}\rvert + \lvert\vec{v}\rvert$。
	~~14~~ 20	

84

單元 **9**：積分法

特定目標：

1. 認識不定積分法為微分法的逆運算。
2. 理解不定積分的性質。
3. 認識不定積分法在幾何及物理上的一些應用。
4. 認識及應用不定積分法的標準公式與及代換法。
5. 理解以定積分作為一個總和的極限的基本原理。
6. 理解及應用定積分的基本性質。
7. 應用定積分去求平面面積及旋轉體體積。

內容	時間分配	教學建議
9.1 不定積分	~~1~~ 2	不定積分可以求導數的逆運算作為介紹，並引出下列簡易性質： $\int (u \pm v)dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx$ 及 $\int ku\,dx = k\int u\,dx$ 介紹「原函數」、「積分符號」、「被積函數」及「積分常數」等名詞。教師應強調積分 $\int u\,dx$ 僅為一個符號而並不代表把 u 乘以 dx。
9.2 函數的積分法及簡易應用	~~4~~ 5	應提供適量例題及練習，使學生熟習下列積分公式： $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad (n \ne -1)$ (應加以討論 $n = 0$ 的情形) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$ $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + C$

85

表示刪去的內容

86

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議

$$\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

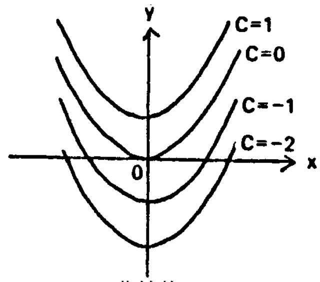
上列被積函數並不包括 $\frac{1}{x}$ 和指數 e^x。教師應強調在大多情況下，被積函數都須略加改動，才能成功導出積分。例如：

$$\int \sqrt{x}(2-x)\,dx = \int (2\sqrt{x} - x^{\frac{3}{2}})dx = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + C$$ 等。

在幾何應用上，學生應瞭解一條曲線的形狀，乃取決於其在定義域內每點的斜率，而其對應於坐標軸的位置，則決定於積分常數。由此，同一函數的兩個原函數，最多只能相差一常數值。事實上函數 y=f(x)+C 代表著一曲線族而 y=f(x)只是該曲線族內的一員。下圖是一個例子：



曲線族
$y = x^2 + C$

在物理應用上，應包括 $s = \int v\,dt$ 及 $v = \int a\,dt$ 的公式。以下是一個例子。

87

內 容	時 間 分 配	教 學 建 議

例

一質點以 $a = 4t - 3\,ms^{-2}$ 的加速度沿一直線移動，其中 t 秒為其經過點 O 後的時間。當 $t = 3$ 時，質點的速度為 $12\ ms^{-1}$。求當 $t = 4$ 時質點的速度及在此 4 秒內所走的路程。

在這個例子中，教師應引導學生觀察兩個初值條件：$v = 12$ 當 $t = 3$ 及 $s = 0$ (在 O 點) 當 $t = 0$。

9.3 積分法基本技巧　　~~9~~ 3

(1) *代換法*

教師應強調由於 $F = \int f(x)\,dx$ 是 x 的函數而 x 是 u 的函數，所以 F 可被間接看成是 u 的函數，從而可求出其對 u 的導數。由鏈式法則：

$$\frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{du} = f(g(u))g'(u)$$

所以若以 u 表 t，則 F 為 $\int f(g(u))g'(u)\,du$。多樣化的例子在這兒非常有用。

學生只須了解下列公式而無需學習代換積分法。

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \ n \neq -1$$

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$$

教師可利用微分法驗証上述公式。

例一

取 $u = 2x - 7$，則

$$\int \frac{1}{(2x-7)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{2}du = -\frac{1}{2u} + C$$

$$= -\frac{1}{2x-7} + C$$

應用 $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$, $n \neq -1$

例二

取 $u = 4x$，則

$$\int \cos 4x\,dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{4}du = \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

應用 $\int \cos(ax+b)dx = \frac{\sin(ax+b)}{a} + C$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議

在學生掌握技巧之後，教師可鼓勵他們省去直接寫出變量 u 的步驟。故此上面兩例題可以下列方式完成：

$$\int \frac{1}{(2x-7)^2}\,dx = \int \frac{1}{(2x-7)^2}\,d(2x-7) = \frac{-1}{2x-7}+C$$

$$\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\int \cos 4x\,d(4x) = \frac{1}{4}\sin 4x + C$$

例三

對於像 $\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1}$ 一類的被積函數，教師可引導學生進行運算如下：

$$\int \frac{x^2-2x}{x^2-2x+1}\,dx = \int \frac{(x^2-2x+1)-1}{x^2-2x+1}\,dx = \int \left[1-\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx \;=1+\frac{1}{x-1}+C$$

$$\boxed{\text{應用} \int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C,\ n \neq -1}$$

學生無須知道把此類函數化成部分分數的一般方法，但若給出擴展式，學生應能求出各常數值，進而求解不定積分。

(2) *三角函數的積分法*

(*a*) 形式如 $\int \sin mx \cos nx\,dx$， $\int \cos mx \cos nx\,dx$ 及 $\int \sin mx \sin nx\,dx$ 的積分。
在處理這類積分之前，教師應與學生全面溫習半角公式、和積互化公式等三角恆等式。典型的例子有 $\int \sin 4x \cos 6x\,dx$ 及 $\int \cos^2 x\,dx$ 。

(*b*) 形式如 $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$， $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ 及 $\int \cot^m x \operatorname{cosec}^n x\,dx$ 的簡易積分。積分過程不涉及代換法。
學生應熟識各種三角恆等式及代換法。典型例子包括 $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$ 。
$\int \cos^3 2x\,dx$， $\int \tan^3 x \sec^2 x\,dx$， $\int \sec^4 \frac{1}{2}x\,dx$， $\int \operatorname{cosec}^3 x \cot^3 x\,dx$ 等。

(*c*) 對於其他三角被積函數，例如 $\dfrac{1}{a+b\cos x}$，可以代換 $t=\tan\frac{x}{2}$ 作為一般方法分解。

內容	時間分配	教學建議

例

以代換 $t=\tan\frac{\theta}{2}$ 計算 $\int \frac{1}{1+\cos\theta}\,d\theta$ 。

教師可引導學生推出：

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ 及 } d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}$$

直接代入原式，學生應不難導出

$$\int \frac{1}{1+\cos\theta}\,d\theta = \int dt = t + C = \tan\frac{\theta}{2}+C$$

(3) *三角代換法*

這方法通常應用於 $\sqrt{a^2-x^2}$、 $\sqrt{a^2+x^2}$ 及 $\sqrt{x^2-a^2}$ 形式的式中，藉以消去 $\sqrt{\quad}$ 符號。

學生應知道可分別以 $x=a\sin\theta$ (或 $a\cos\theta$)， $x=a\tan\theta$ 及 $x=a\sec\theta$ 代入計算。教師應提供適量的例題及練習幫助學生熟習技巧。典型的例子有

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$， $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$， $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\,dx$， 及 $\int \frac{2x^2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$ 。

(4) *簡易歸約公式*

分部積分法並不需要但宜給予學生簡易歸約公式作為求導逆運算的積分例題。下列顯示其方法。

例

(*a*) 證明 $\dfrac{d}{dx}(\sin^{n-1}x\cos x) = (n-1)\sin^{n-2}x - n\sin^n x$

(*b*) 設 I_n 代表積分 $\int \sin^n x\,dx$， 證明

$$I_n = \frac{-\sin^{n-1}x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

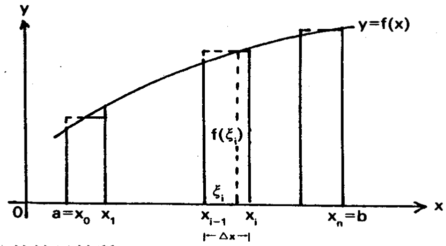
表示刪去的內容

<table>
<tr><th>內 容</th><th>時 間
分 配</th><th>教 學 建 議</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>(c) 由此計算 I_3 及 I_4。

~~由於積分法是微積分學中極重要的一環，故此需要有充分的練習使學生掌握技術。~~</td></tr>
<tr><td>9.4 定積分

本細項祇應用細項9.1至9.3所學的技巧。</td><td>2</td><td>利用下圖及面積的概念，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 可定義為 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的極限，即

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x$，其中 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$



應明確指出定積分的簡易性質：
(1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
(2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
(3) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
(4) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
(5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
(6) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$</td></tr>
</table>

90

<table>
<tr><th>內 容</th><th>時 間
分 配</th><th>教 學 建 議</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>從定積分的定義看來，這些性質都是顯見的，然而教師無須加以證明。
對能力較高的學生，可對以下的性質及其推論加以討論：
若 f 連續，且在閉區間 [a, b] 內非負，則 $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ 。等式成立的必要條件為對閉區間 [a, b] 內所有的 x 值，$f(x) = 0$ 。
推論：$f(x) \ge g(x)$ 蘊涵 $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$</td></tr>
<tr><td>9.5 定積分的計算

本細項祇應用細項9.1至9.3所學的技巧。</td><td>~~4~~
3</td><td>教師可介紹 $\int_a^x f(t)\,dt$ 為正值連續函數 $y = f(t)$，t 軸，直線 $t = a$ 及 $t = x$ 所包圍的圖形的面積。並建立公式 $\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$，其中 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ 。應提供例子幫助學生了解該公式。
例一
$\int_1^2 (x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) = \frac{4}{3}$

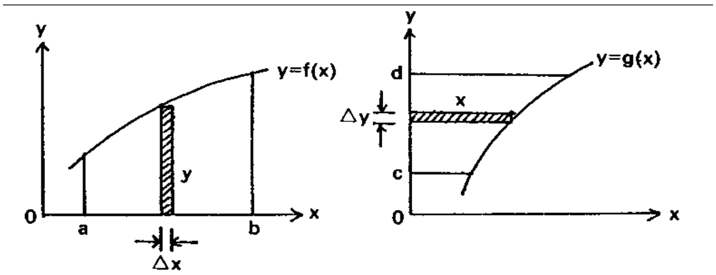
~~例二~~
$\cancel{\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta)\,d\theta}$ ~~其中~~ $\cancel{x = \sin\theta}$
$\cancel{= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta}$
$\cancel{= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}$
$\cancel{= \frac{\pi}{4}}$
~~由於代換法常被應用於定積分之計值(如上述例二)，教師應經常提醒學生代換法。在代換被積函數的同時，積分的上下限也要相應地作出變動，至於被積函數的值域，老師或可指出常被學生忽視的性質如~~</td></tr>
</table>

91

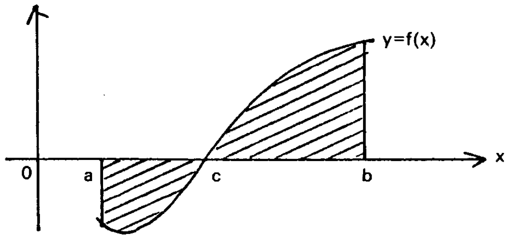
表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\cos^2 x}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx$ 可引進具備特殊性質的被積函數，作為有挑戰性的例子。 *例三* $\sin^5 x\cos x$ 為奇函數，因其滿足條件 $f(-x) = -f(x)$。 由此，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos x\,dx$ 可寫成 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos x\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^5 x\cos x\,dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos x\,dx$ $= 0$ 也可用類似的方法透過例題介紹偶函數的積法。 *例四* 對於 $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ 一類的積分，老師可先引導學生證明以下性質 若 $f(a+b-x) = f(x)$，則有 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx = \frac{1}{2}\int_a^b [f(x)+f(a+b-x)]\,dx$ 及 $\int_a^b x f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$ 然後代入 $a = 0$，$b = \pi$ 及 $f(x) = \sin x$，積分 $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ 的值。
9.6 定積分的應用	~~8~~ 7	由 9.4 節可導出 $A = \int_a^b y\,dx$ 或 $A = \int_c^d x\,dy$ 等公式。下列兩圖有助於記憶上述公式。

92

內容	時間分配	教學建議
在計算體積時，學生祇需考慮以 x 軸或 y 軸作旋轉軸的情況。		

教師應透過例題引導學生探討當部分曲線 $y = f(x)$ 低於 x 軸時所發生之情形，如下圖所示。此時，$\int_a^b f(x)\,dx$ 只會給出由 a 至 b 面積的代數和。



為了避免誤導的結果，可鼓勵學生在計算面積之前，先劃出相關的草圖。並且將所求的面積應分為兩個部分(見上圖)，先求 f(x)由 a 至 c 及由 c 至 b 的積分而後把兩部分的絕對值相加求出所需答案。下例可用作說明。

93

表示刪去的內容

94

內容	時間分配	教學建議

例

求曲線 $y = x(x-1)(x-3)$ 及 x 軸所圍成之圖形面積。

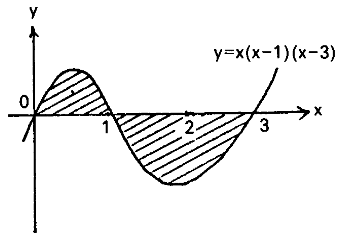
在例中，可要求學生自己繪出草圖。

然後，$\int_0^1 x(x-1)(x-3)\,dx = \frac{5}{12}$

$\int_1^3 x(x-1)(x-3)\,dx = -\frac{8}{3}$

由此，所需面積為

$$\frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$$



對於公式 $A = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx$ 及 $A = \int_c^d (x_1 - x_2)\,dy$，建議用 $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(y_{1i} - y_{2i})\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x = \int_a^b g(x)\,dx$ 的方法，藉以提醒學生總和的極限及定積分之間的關係。

例題如 $y^2 = 4x$ 及 $y = 2x - 4$ 所圍面積；$y = \sin x$ 及 $y = \cos x$，$0 \le x \le 2\pi$，所圍面積等，可用作說明。

95

內容	時間分配	教學建議

不需要教授 $A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2\,d\theta$ 的公式以及當 x 與 y 同時都以第三參數 t 表達的情況。

可用類似的方法處理繞著坐標軸或平行於坐標軸的直線旋轉而成的旋轉體及空心旋轉體的體積。學生需要學習圓盤法。對能力較高的學生，也可視情況引進圓柱外殼法。下為一例。

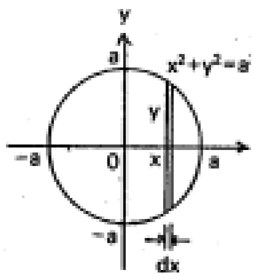
例

求半徑為 *a* 之球體體積。

將球體視為一半徑為 *a* 的圓形所產生的旋轉體。

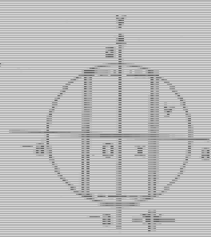
應用圓盤法：

$$\text{球體體積} = \int_{-a}^{a} \pi y^2\,dx = \int_{-a}^{a} \pi(a^2 - x^2)\,dx = \frac{4\pi a^3}{3}$$



同樣亦可應用圓柱外殼法：

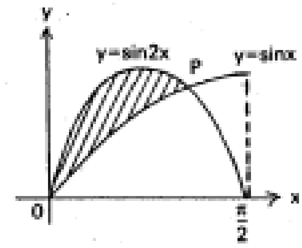
$$\text{球體體積} = \int_0^a 2\pi x \cdot 2y \cdot dx = \int_0^a 4\pi x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4\pi}{3}a^3$$



表示刪去的內容

<table>
<tr><th>內容</th><th>時間分配</th><th>教學建議</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td rowspan="2">應給予學生適量的例題。圓錐體體積、球體體積等，都是有趣的例子。

學生應留意到解答這類題目時，經常要找尋曲線與坐標軸、和曲線與曲線之間的交點。為此，事先描繪各有關曲線草圖，有助於解答問題。

例
在圖中，曲線 $y = \sin 2x$ 及 $y = \sin x$ 相交於 P 點。試求 P 的坐標，並以此求陰影部分繞 x-軸旋轉所成旋轉體的體積。

</td></tr>
<tr><td></td><td>28</td></tr>
</table>

表示刪去的內容