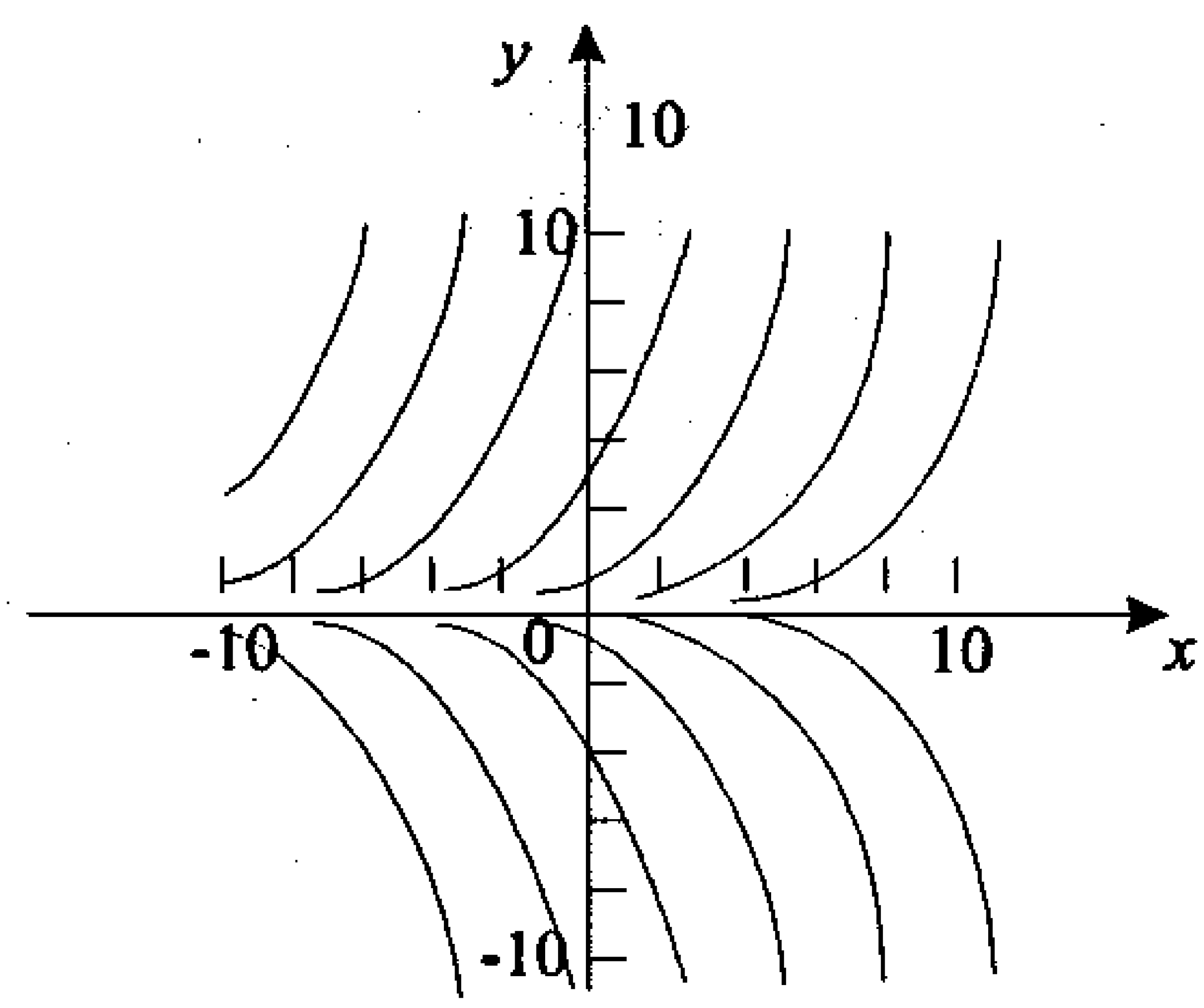
單元 1：一階微分方程及其應用

特定目標：

1. 學習解某些特定一階微分方程技巧。
2. 在實際的情況下應用有關建立及解一階微分方程的技巧。
3. 能夠理解一階微分方程的解。

內容	時間分配	教學建議
1.1 某本概念	3	教師可利用如 $\frac{dy}{dx}=x^2$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}=x^3$ 的簡單例子引進微分方程(即含有微分係數的方程)的一般概念，並讓學生求出這些方程的解，由於這些方程可以簡單的積分法求解，所以學生應該沒有任何困難。(第一個方程的解可積 x^2 一次求出，而第二個方程則須積 x^3 兩次。) 可是，對於方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0$ 來說又如何呢？ 爲引起學生的興趣，教師可引進術語「常微分方程」，但由於在本範疇的範圍內只考慮一個自變量，故此可將它簡稱爲微分方程。 學生亦應該知道微分方程的術語：階、次數、綫性及非綫性。教師應利用實例來說明不同的概念。 教師可以透過例子清楚說明微分方程的解的意義。例如，$f(x)=e^{2x}$ 是方程 $\frac{dy}{dx}-2y=0$ 的解(因爲 $f'(x)-2f(x)=0$)。 「任意常數」、「一般解」及「特解」是本範疇的基本概念；特別地，學生應知道任何不含有 n 個任意常數的 n 階方程的解並非其一般解，而符合某些初值條件或邊界條件的解則稱爲特解。這些概念可透過圖像進一步加以闡明。例如，方程 $\frac{dy}{dx}-2y=0$ 的一般解 $y=ce^{2x}$ 可用下圖的曲綫族來表示，而其特解 $y=e^{2x}$ (或者 $y=2e^{2x}$ 等)只是曲綫族內其中一條曲綫。

內容	時間分配	教學建議
		 學生亦應能識別函數內任意常數的數目。例如，函數 $c_1e^{c_2+x}$ 似乎含有兩個任意常數，但事實上由於 $c_1e^{c_2+x}=\left(c_1e^{c_2}\right)e^x=ce^x$，其中 $c_1e^{c_2}$ 可由一個任意常數 c 所取代，所以最終只有一個任意常數。對於能力較佳的學生，教師亦可與他們討論方程的奇解。例如，在方程 $y\frac{dy}{dx}=x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1$ 中，$y=cx+\frac{1}{c}$ 是一般解而 $y^2=4x$ 則是奇解。
1.2 微分方程的建立	2	本節的重點在於怎樣由實際情況建立微分方程，至於求解所建立的方程則可留待以後的章節。教師可提供學生一些例子，指示他們應有的步驟。一個典形的例子就是生物增長的問題：某一品種的生物個數在時間 t 的增長率，$\frac{dP}{dt}$，與當時的 P 的數值成正比。學生應能寫出關係式 $\frac{dP}{dt}\,\alpha\,P$ 或 $\frac{dP}{dt}=kP$，其中 k，稱爲增長常數，是一正常數。
1.3 可分變量微分方程的解	4	學生應能辨認出可分變量的微分方程，並將方程寫成 $g(y)=dy=f(x)dx$ 的形式，之後，學生應毫無困難地利用簡單積分法求解有關方程。在眞實的應用裏，一般來說，微分方程的一般解並不特別重要，反之，符合特定的初值條件的特解顯得較爲有用，所以教師應提供學生更多初值問題。

內容	時間分配	教學建議
		在現實的生活裏有很多例子皆可導致可分變量的一階微分方程，以下是其中一部分。 1.人口增長 某種生物的個數由於移居關係每年減少 n ，同時由於該生物的出生與死亡，每年的自然增長率爲現年個數的 $\lambda\%$，若起初的個數爲 N，則 t 年後的個數 x 可由 $\frac{dx}{dt}=\frac{\lambda}{100}x-n$ 得出。 2.指數衰變 某放射性物質的衰變率正比於時間 t 時所餘質量 $x(t)$，由此可得 $\frac{dx}{dt}=-\mu x$ 其中 μ 是一正數。 3.冷卻定律 某物體被放置於溫度爲 θ 的環境中，其溫度變化率正比於物體的溫度與 θ 的差。若時間 t 時物體的溫度爲 T，則 $\frac{dT}{dt}=k(T-\theta)$，其中 $k<0$。 4.擴散 某能滲透的罐載有濃度爲 x mgcm^{-3} 的溶液，它被置於載有相同溶液但濃度較高 $(c$ mgcm$^{-3})$ 的大容器中；由於擴散關係，罐內溶液的濃度會續漸增加。若 c 是常數，罐內溶液的濃度增加率與濃度差成正比。因此， x 必滿足微分方程 $\frac{dx}{dt}=k(x-c)$，其中 k 爲一正常數。 5.蒸發作用 一濕而有氣孔的物質的水份散失率與當時的含水量 $x(t)$ 成正比，由此可得方程式 $\frac{dx}{dt}=-kx$，其中 k 是正常數。 6.化學反應 若溫度不變，則化學反應的速度正比於各反應物質的濃度之積。如兩反應物質原本的質量分

內容	時間分配	教學建議
		別爲 a 及 b，而 x 代表所生成物質的質量，則 x 必滿足方程 $\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$，其中 k 是正常數。 7.改良的人口增長定律 這是一個利用微分方程 $\frac{dN}{dt}=aN-bN^2$ 加以改良的人口模式，其中 aN 是出生率，$-bN^2$ 是死亡率，而 N 是當時的人口個數。這裏，a 及 b 都是正常數。 8.細菌的傳播 這裏考慮方程式 $\frac{dN}{dt}=kN(P-N)$，其中 N 是時間 t 時受細菌感染的人口個數，而 P 是可能受到感染的總人口個數，並假定 N 的變化率正比於 N 及 $P-N$ 的積。 在以上例子中，教師除了引導學生建立及解微分方程外，亦應著重其解的理解。
1.4 綫性微分方程 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ 的解	4	對於能化簡爲綫性形式 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ 的方程，可利用積分因子求解。教師應強調由於這是一階方程，其解只有一個任意常數，所以積分因子 $e^{\int p(x)dx}$ 不應有積分常數，而事實上 $p(x)$ 的任一原函數都能達到其目的。由經驗所得，學生很容易忘記積分因子的形式，有些學生並且會將 $e^{\int p(x)dx}+c$ 視爲上述方程的解，因此，教師應給予學生充分的練習以保證學生能掌握這技巧。 能產生一階綫性微分方程的實際例子都應予以推薦。以下是兩個例子。 1.混合物 一箱內有 100L 的溶液，其中溶 10kg 的化合物。濃度爲每升 2kg 的溶液以每分鐘 5L 的速度流入箱內。箱內的混合物於攪勻後以每分鐘 4L 的速

內容	時間分配	教學建議
		度流出。若箱內的化合物的質量是 xkg ，則 x 必滿足微分方程 $\frac{dx}{dt}+\frac{4x}{100+t}=10$ 及當 $t=0$ 時 $x=10$ 的初值條件。 2.連鎖化應 放射性元素 X 衰變爲放射性元素 Y ，而 Y 衰變爲元素 Z。在時間 t 時， X 、 Y 及 Z 的質量(順序地記爲 x 、 y 及 z)和是常數。當 $t=0$ 時 $x=M$ 及 $y=z=0$，則相應的微分方程是 $\frac{dx}{dt}=-k_1x$ 及 $\frac{dy}{dt}=k_1x-k_2y$。由第一個方程得出 $x=Me^{-k_1t}$ ，而第二個方程經代入 x 後則變爲 $\frac{dy}{dt}+k_2y=k_1Me^{-k_1t}$ 。
1.5 可化簡爲可分變量或綫性形式方程的解	4	學生應能利用指定的公式將微分方程化簡爲上述任何一種的方程形式。例如，伯努利方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$ ， $n\neq0$ ， $n\neq1$ ，可代入公式 $u=y^{1-n}$ 將它化簡爲一綫性方程，而黎卡提微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y+Q(x)y^2=R(x)$ 則可代入公式 $y=Y+\frac{1}{u}$ 將之化簡爲一綫性方程，其中 Y 是已知的解(即特解 Y 爲已知)
	17	