單元 4 ：近似

特定目標：
1. 學習近似的概念和誤差的處理。
2. 學習泰勒展開式。
3. 應用泰勒展開式逼近函數及估計其誤差。

內容	時間分配	教學建議
4.1 誤差的處理、誤差估計及代數運算	6	對任何計算，無論人手的，用計算機或電腦計算出來，數值結果的誤差分析是一個基本的問題。由於原始數據往往是基於實驗結果或估計，故此它們通常不是精確的，而數值解法本身也引入各類不同的誤差。爲了使學生明瞭計算結果的精確程度，教師應教授學生處理計算中簡單誤差分析。
(a)三種主要的誤差		學生應知道在數值計算中的三種主要誤差爲固有誤差、截斷誤差及捨入誤差。
(i)固有誤差		固有誤差是指由量度的不確定所產生的數值上的誤差或由於必須利用有限數目位元記憶來儲存一些不能以有限數目位數準確表達的數字而造成的誤差。
(ii)截斷誤差		截斷誤差及捨入誤差同指那些由數值方法處理數據而產生的誤差。以有限的步驟取代無窮的數學程序所引致的誤差稱爲截斷誤差。在此課程中的數值方法，很多數學程序是無窮的(意思是指要獲得精確答案須要無窮數目的迭代運算)，故此截斷誤差這題目是十分重要的。
(iii)捨入誤差		利用計算機或電腦處理實數運算會產生捨入誤差，這因爲算術運算只能用有限位數進行，令很多計算以近似値取代眞實數値。 要學生明白捨入的意念，教師可用十進制 k 位數以標準型式 $\pm 0.d_1d_2d_3...d_k \times 10^n$ ， $1 \le d_1 \le 9$ ， $0 \le d_i \le 9$ 其中 $i = 2,3,4...k$ 說明。此外，收尾法及去尾法的意念亦須清楚向學生解釋。

內容	時間分配	教學建議
(b)絕對及相對誤差		在此階段，教師宜與學生重溫他們在中三時學過的絕對及相對誤差，並向他們指出(a)部份的三類誤差都可以絕對或相對形式表示。
(c)誤差估計		一個物理量度可能以某一數目的位數連同固有誤差的界限一起表示，例如該長度爲 2.3 ± 0.1cm 或 2.3cm(準確至二位有效數字)，又或者完全沒有說明位數的有效性，例如長度爲 2.3cm 。在後者而言，一般約定是它的誤差界限爲不超過末位的半個單位，即是 0.05cm 。 至於截斷誤差，教師宜在本單元的有關章節內教授計算方法時向學生介紹。 教師宜引導學生推導出用 k 位數捨入算術相對誤差的界爲 $0.5\times10^{-k+1}$ 。
(d)誤差的合成		這裏的重點是在某一階段誤差的傳播問題，即是說，在連串的運算中，誤差的效應是擴大或是縮小的問題。學生應熟習下列的事實。 1.和及差 若 $S=a+b$ ，則 $\max\lvert\triangle S\rvert=\lvert\triangle a\rvert+\lvert\triangle b\rvert$ 。 若 $K=a-b$ ，則 $\max\lvert\triangle K\rvert=\lvert\triangle a\rvert+\lvert\triangle b\rvert$ 。 2.乘及除 若 $P=ab$ ，則 $\max\left\lvert\frac{\triangle P}{P}\right\rvert=\left\lvert\frac{\triangle a}{a}\right\rvert+\left\lvert\frac{\triangle b}{b}\right\rvert$ 。 若 $Q=\frac{a}{b}$ ，則 $\max\left\lvert\frac{\triangle Q}{Q}\right\rvert=\left\lvert\frac{\triangle a}{a}\right\rvert+\left\lvert\frac{\triangle b}{b}\right\rvert$ 。 3.指數 若 $F=a^k$ ，則 $\max\left\lvert\frac{\triangle F}{F}\right\rvert=k\left\lvert\frac{\triangle a}{a}\right\rvert$ 。

內容	時間分配	教學建議
		下列是一些練習的例子。 例一 兩質量分別量度爲 (100.0±0.4)g 及 (94.0±0.3)g。計算該兩質量和及差的最大絕對誤差。 例二 已知單擺的時間週期爲 $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$，其中 ℓ 爲單擺的長度和 g 是自由物體的重力加速。現以一長爲 0.600m 的單擺來確定 g 的值。若測量得的 T 值爲 1.55s，計算 g 值的最大誤差百分率。
4.2 利用泰勒展開式逼近函數值 (a)函數的泰勒展開式	6	作爲引起動機，教師可著學生求多項式 $p(x)$ 而其值與導數在單一變數 x_0 上與函數 $f(x)$ 的吻合，即 $p^{(i)}(x_0)=f^{(i)}(x_0),\ i=0,1,2,\ldots,n$。將 $p(x)$寫成 $p(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n$ 教師可引導學生導出 f(x)的泰勒展開式 $p(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$。這個觀念可以推展至利用無限級數的泰勒展開式來表示一個函數 $f(x)=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!}+f^{(2)}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\ldots$

內容	時間分配	教學建議
		以下展開式例子可用作說明。 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots$ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots$ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$ 在現階段，教師值得提出麥克勞林級數是泰勒展開式的一個特例，而對一些能力較高的學生，則可以用下列方法與他們討論泰勒展開式的收斂區域。 對 $\ln x$ 的展開式，取 $x_0 = 1$，學生可得 $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$ 代入 $x = 1$ 及 $x = 2$，上式分別變爲 $\ln 1 = 0$ 及 $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$。教師可要求學生將 $x = 0$ 及 $x = 3$ 代入展開式並引導他們發現所得的展開式是不收斂的。 之後，同學可以嘗試計算在收斂區域內一些變數上的函數值。在這裏，基本上只要求學生能展開泰勒展開式至四階導數及完成相應的計算。函數如 $y = (1 + x^2)\ln(1 + x)$ 是典型例子。
(b)誤差的估計		學生應能回憶起利用拉格朗日多項式逼近函數時的截斷誤差這個名詞。教師並可導出拉格朗日形式的餘項(只對能力較高的學生)爲 $R_n = f^{(n)}(\varepsilon)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$ 其中 ε 介於 x_0 及 x 之間。

內容	時間分配	教學建議
		學生應不難看出泰勒展開式的最大誤差是 $\lvert R_n \rvert \le \left\lvert M\frac{(x-x_0)^n}{n!} \right\rvert$ 其中對所有 ε 介於 x_0 及 x 之間 $M = \max\left\lvert f^{(n)}(\varepsilon) \right\rvert$。 給出這個誤差項，教師可要求學生計算一些例子如只取展開式 $cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\ldots$ 的首三項來估計 $cos\frac{\pi}{3}$ 的最大誤差及求出利用 $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\ldots$ 計算 e 值而最大誤差少於 0.0001 時應用的項數。
	12	