單元 7 ：初級概率理論

特定目標：
1. 認識概率在日常生活中的用處及其重要性。
2. 學習概率的基本定律及其在實際情況的應用。

內容	時間分配	教學建議
		學生雖然對本範疇部分基本概念已有認識，但因此等概念十分重要，故此教師亦應與學生重溫及鞏固這些知識。
7.1 基本定義 樣本點、樣本空間、等概率空間、事件的概率	3	學生應已熟悉概率樣本空間及事件的意義，但可能對樣本點不大認識，故此，教師可討論一些如擲毫等的例子，籍此說明實驗中之樣本空間不是唯一的。例如，擲三枚硬幣時，其中兩個可能樣本空間是： {(H ， H ， H)，(H ， H ， T)，(H ， T ， H)，(H ， T ， T)，(T ， H ， H)，(T ， H ， T)，(T ， T ， H)，(T ， T ， T)}及{全部反面，一正面，二正面，三正面} 教師應闡述等概率空間的意義。在上述的例子中，前者是等概率空間，而後者卻不是。以下是另一例子： 例 甲每天都要外出工作，他可能會遇到交通意外而喪生；不過，他遇到交通意外而喪生的機會不等於$\frac{1}{2}$，因爲兩個結果(喪生及不喪生)的發生機會並不均等。 當學生對此概念清楚後，教師便可引導他們覆述概率的定義。 $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$ 其中 E 是事件， S 是等概率空間 教師應要強調 $0 \le P(E) \le 1$，並討論必然發生($P(E)=1$)及不可能發生的事件($P(E)=0$)。
7.2 計數法	5	教師應介紹不同的計數法，籍以運算可能結果的總數。乘法原理是其中一種，方法如下：

內容	時間分配	教學建議
		n_1 元素　　$a_1,\ldots\ldots\ldots\ldots, a_{n_1}$ n_2 元素　　$b_1,\ldots\ldots\ldots\ldots, b_{n_2}$ $\vdots$ n_r 元素　　$x_1,\ldots\ldots\ldots\ldots, x_{n_r}$ $(a_{j_1},\ldots\ldots\ldots\ldots, x_{j_r})$ 共有 $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots\ldots \cdot n_r$ 種不同依次組合方式。 例 在某中學內，學生按其性別，年齡及所屬學社被分類。假如該校有四個學社及五個年齡組別，於是共有 2 × 4 × 5 組=40 組。 其他計數法包括組合、排列及其有關的公式如 $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$，$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$， $C_r^n = C_{n-r}^n$ 及 $C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$ 亦要清楚討論。教師應強調組合與排列的分別。爲了加深學生對計數法的認識，教師可引用更多的例子，如計算隨意把 n 個球放在 n 個盒中而每一盒都有球的概率及贏取六合彩各種獎項的概率。 這裏只要求學生能掌握組合及排列的基本技巧，並籍以解決一些簡單問題。教師不必花費過多精力去作深入研究。 對一些能力較高的學生，教師可討論以下公式： 在 n 個元素中，其中 p_1 個元素(第一類)是相似的，p_2 個元素(第二類)是相似的，…………p_k 個元素(第 k 類)是相似的，由此，它們可依次以 $\frac{n!}{p_1!p_2!\ldots\ldots p_k!}$ 方法排列。

內容	時間分配	教學建議
		教師並可與學生討論其它應用，如「簡單超幾何概率」，但學生無須認識這個術語。日常生活例子如品質檢驗問題和估計水池中魚兒的數量等，亦可討論。下列是其中兩個例子。 例一 一批貨品內有 n 台錄影機，其中 r 台是次貨，現隨機抽出 p 台作檢驗($r<n$ 及 $p<n$); 在這裏可要求學生計算有 q 台次貨的概率 ($q<r$ 及 $q<p$)。 同樣地，教師亦可要求學生算出當 $n=80$, $r=10$ 及 $p=15$ 時最少有兩台次貨的概率。 例二 一水池有魚 N 尾，從中捕捉了 r 尾，並於每尾身上加上記號，然後將它們放回池中；待池中所有魚兒混在一起後，再捕捉 r 尾魚，要計算在第二次的捕魚樣本中有 n 尾是有記號的概率並不困難。再者，教師可引導學生找出水池中魚兒的約數。
7.3 概率定理 加法和乘法定律 互斥事件 獨立事件 條件概率	3	學生學習互斥事件及獨立事件的定義應該沒有任何困難，而相對的加法及乘法定律即 $P(E\cup F)=P(E)+P(F)$ 及 $P(E\cap F)=P(E)P(F)$ 亦應討論。一些典型的例子，如擲毫、抽球及擲骰等，均可幫助學生重溫此等概念。 教師應引用例子，教導學生條件概率的意義及記號。 教師現可介紹非獨立事件及非互斥事件。加法及乘法的定律依次變成 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ 及 $P(A\cap B)=P(A)P(B\|A)$。 $P(E_1\cap\ldots\ldots\cap E_n)$ 的一般公式亦可討論。教師亦可提出 A 、 B 是兩個獨立事件當且僅當 $P(A\|B)=P(A)$ 或 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ 。

內容	時間分配	教學建議
		在處理那些只有有限結果的應用題時，樹形圖可有效地列出所有可能的結果。教師更應舉例，以顯示法則的應用。以下是其中一些例子： 例一 甲袋中有 4 個紅球及 6 個黑球，乙袋中有 6 個紅球及 4 個黑球。現從甲袋中隨機抽出一球(第一球)，放在乙袋中，混合後又從乙袋中隨機抽出一球(第二球)，放在甲袋中，最後在甲袋中抽出一球(第三球)。 在此例中，教師可要求學生計算第 i 個球是紅色的概率(i 等於 1, 2, 3)。教師亦可提醒學生使用樹形圖劃出所有可能的結果。 例二 志強可在週末(星期五、六、日)在家中會見朋友。假設美玲在星期五探望志強的概率是 $\frac{1}{q}$，在往後的兩天裏，如果她在前一天已探望過志強，她再去的概率是 $\frac{1}{m}$; 如果她在前一天未探望過志強，她去的概率是 $\frac{1}{n}$ 。 在此例中，可行的問題包括計算美玲星期日去探望志強的概率及計算 $P(B\|A)$ 及 $P(B\|\overline{A})$ 其中 A 代表美玲星期五去探望志強，而 B 代表美玲星期日去探望志強。 教師可引導學生使用樹形圖找出所有可能的結果。
7.4 貝葉斯定義	4	學生熟習了條件概率後，教師可開始闡釋貝葉斯定理如下： 設Ω 樣本空間分割爲 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 互斥事件，並設 B 爲另一事件而 $P(B) \neq 0$

內容	時間分配	教學建議
		$$P(A_j\|B)=\frac{P(A_j\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B\|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B\|A_i)P(A_i)}$$ 學生並不需要推證貝葉斯定理，所以教師可引用一些數例，籍以解釋當中的術語。解決有關貝葉斯定理的問題，樹形圖是常用的方法。以下是其中一個例子： 例： 三個罐分別放有 6 個黑球及 9 個白球， 12 個黑球及 3 個白球， 8 個黑球及 7 個白球。現隨機選取一罐並從中抽球一個。 教師可要求學生劃出樹形圖，及討論如何求得黑球的概率。之後，學生應沒有任何困難求出 P(從第二個罐抽得的球 | 黑球)的值。
7.5 遞推關係	4	教師須幫助學生認識先後事件相關的情況。學生應懂得列出公式，連起先後發生的事件的概率。以下的例子可幫助學生了解遞推的概念。 例一 市面上有兩種新牌子的汽水。由於包裝不同，某甲選擇 X 汽水的概率爲 0.55 ，選擇 Y 汽水的概率爲 0.45 。假設她每天只飲其中一種汽水，如果她昨天飲過 X，今天飲 X 的概率是 0.6 ，而飲 Y 的概率是 0.4 。相反地，如果她昨天飲的是 Y，今天飲 X 的概率是 0.3，而飲 Y 的概率是 0.7 。 在此例中，樹形圖可用來顯示 P_{n-1}，$1-P_{n-1}$，P_n 及 $1-P_n$ 的相互關係(P_n 是她在第 n 天飲 X 的概率)，由此，學生可輕易以 P_{n-1} 表 P_n，他們亦能以 P_1 及 n 來表 P_n。學生可能有興趣知道 X 汽水最終所佔市場的比例爲 $\lim_{n\to\infty}P_n$ 。

內容	時間分配	教學建議
		例二 由一個裝有 4 個白球及 9 個黑球的袋中，抽出一球，然後將它放回袋中，如是者重覆 n 次。Q_n 是不會連續兩次抽出黑球的概率。教師可教導學生找出 Q_n，Q_{n-1} 及 $Q_{n-2} (n \geq 3)$ 的關係，亦可要求學生寫出 Q_1，Q_2 及 Q_3，然後計算 Q_4，Q_5 ……。 教師無須教授馬可夫鏈及差分方程。
	19	