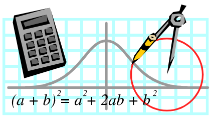
第五章　　示例

示例一　　算術中項 ≥ 幾何中項

示例二　　平面面積

示例三　　二項式定理



示例一：

算術中項 ≥ 幾何中項

目標： 證明「算術中項 ≥ 幾何中項」（不需使用反向歸納法）

預備知識： (1) 數學歸納法原理
(2) 證明絕對不等式的基本技巧

活動內容：

假設 $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ 及 $G_n = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$，其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是 n 個正數。根據《中學課程綱要純粹數學科（高級程度）1992》，若有需要，教師可利用反向歸納法證明算術中項 ≥ 幾何中項。然而，「反向歸納法」已在本課程中刪去。以下是證明此不等式的一些其他方法：

<u>方法一</u>

$A_1 = G_1$ 及 $A_2 \ge G_2$ 明顯成立。

假設 $A_k \ge G_k$ 是真確的，其中 k 是一個大於或等於 2 的正整數。

當 $n = k + 1$，

情況(i) 若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1}$，則 $A_{k+1} = G_{k+1}$ 明顯成立；

情況(ii) 若 $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ 不是盡皆相等，在不失一般性的情況下，可假設 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{k+1}$ 及 $a_1 < a_{k+1}$.

可得出 $\dfrac{a_1}{G_{k+1}} < 1$ 及 $\dfrac{a_{k+1}}{G_{k+1}} > 1.$

假設 $y = a_1 a_{k+1}$。因爲 $A_k \ge G_k$，可得出

$$\frac{y}{(G_{k+1})^2} + \frac{a_2}{G_{k+1}} + \cdots + \frac{a_k}{G_{k+1}} \ge k\sqrt[k]{\frac{y}{(G_{k+1})^2} \cdot \frac{a_2}{G_{k+1}} \cdots\cdots \frac{a_k}{G_{k+1}}} = k\sqrt[k]{\frac{a_1 a_{k+1} a_2 \ldots a_k}{(G_{k+1})^{k+1}}} = k$$

在不等式左右兩方同時加上 $\dfrac{a_1}{G_{k+1}} + \dfrac{a_{k+1}}{G_{k+1}} - \dfrac{y}{(G_{k+1})^2}$，可得出

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{G_{k+1}} + \frac{a_2}{G_{k+1}} + \cdots + \frac{a_k}{G_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{G_{k+1}} &\ge k + \frac{a_1}{G_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{G_{k+1}} - \frac{y}{(G_{k+1})^2} \\ &= k + 1 + \frac{a_1}{G_{k+1}} - 1 + \frac{a_{k+1}}{G_{k+1}} - \frac{a_1 a_{k+1}}{G_{k+1}} \cdot \frac{1}{G_{k+1}}\end{aligned}$$

$$=k+1+\left(1-\frac{a_1}{G_{k+1}}\right)\left(\frac{a_{k+1}}{G_{k+1}}-1\right)$$

$\because\ \dfrac{a_1}{G_{k+1}}<1$，$\dfrac{a_{k+1}}{G_{k+1}}>1$，$\therefore\ \left(1-\dfrac{a_1}{G_{k+1}}\right)\left(\dfrac{a_{k+1}}{G_{k+1}}-1\right)>0.$

因此，我們可得出 $\dfrac{a_1}{G_{k+1}}+\dfrac{a_2}{G_{k+1}}+\cdots+\dfrac{a_k}{G_{k+1}}+\dfrac{a_{k+1}}{G_{k+1}}>k+1.$

$\therefore\ A_{k+1}>G_{k+1}$ 成立。

合併情況(i)及(ii)的結果，可得出 $A_{k+1}\ge G_{k+1}.$

根據數學歸納法原理，可知對所有自然數 n，$A_n\ge G_n$ 皆成立。

方法二

$A_1=G_1$ 及 $A_2\ge G_2$ 明顯成立。

假設 $A_k\ge G_k$ 是真確的，其中 k 是一個大於或等於 2 的正整數。

假設 $\underbrace{A_{k+1}, A_{k+1}, \ldots, A_{k+1}}_{(k-1)\text{項}}$ 和 a_{k+1} 的幾何中項及算術中項分別爲 M 及 L，

則 $M=(a_{k+1}{A_{k+1}}^{k-1})^{\frac{1}{k}}$ 及 $L=\dfrac{1}{k}\left[a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}\right].$

利用歸納法的假設 $M\le L$，可得出

$$\begin{aligned}\left({G_{k+1}}^{k+1}{A_{k+1}}^{k-1}\right)^{\frac{1}{2k}}&=\left(a_1a_2\cdots a_k a_{k+1}{A_{k+1}}^{k-1}\right)^{\frac{1}{2k}}=\left[\left(a_1a_2\cdots a_k\right)^{\frac{1}{k}}\left(a_{k+1}{A_{k+1}}^{k-1}\right)^{\frac{1}{k}}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\left(G_kM\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le\frac{1}{2}\left(G_k+M\right)\\
&\le\frac{1}{2}\left(A_k+L\right)\quad(\text{由於 } G_k\le A_k \text{ 和 } M\le L)\\
&=\frac{1}{2}\{A_k+\frac{1}{k}\left[a_{k+1}+(k-1)A_{k+1}\right]\}\\
&=\frac{1}{2k}\{a_{k+1}+kA_k+(k-1)A_{k+1}\}.\\
&=\frac{1}{2k}\{(k+1)A_{k+1}+(k-1)A_{k+1}\}\\
&=A_{k+1}\end{aligned}$$

即 $(G_{k+1})^{k+1}(A_{k+1})^{k-1}\le(A_{k+1})^{2k}$

$\therefore G_{k+1}\le A_{k+1}$ 成立。

根據數學歸納法原理，可知對所有自然數 n，$A_n\ge G_n$ 皆成立。

方法三

$A_1 = G_1$ 及 $A_2 \ge G_2$ 明顯成立。

假設 $A_k \ge G_k$ 是真確的，其中 k 是一個大於或等於 2 的正整數。

當 $n = k+1$,

情況(i) 若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k+1}$，則 $A_{k+1} = G_{k+1}$ 明顯成立；

情況(ii) 若 $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$不是盡皆相等，在不失一般性的情況下，可假設 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{k+1}$ 及 $a_1 < a_{k+1}$.

因爲 $A_k \ge G_k$，可得出

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \ge k\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} + a_{k+1}$$

$$= \left(k \sqrt[k]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_{k+1}}{(a_{k+1})^{k+1}}} + 1 \right) a_{k+1}$$

$$= (kr^{k+1} + 1)\, a_{k+1}$$

其中 $r^{k(k+1)} = \dfrac{a_1 a_2 \ldots a_{k+1}}{(a_{k+1})^{k+1}}$ 及 $r^{k(k+1)} < 1$ 並且 $r > 0$.

因爲 $0 < r^{k(k+1)} < 1$，則 $0 < r < 1$ 及 $r^k < r^{k-1} < r^{k-2} < \ldots\ldots < r^3 < r^2 < r$.

因爲 $\dfrac{1 - r^{k+1}}{1-r} = 1 + r + \ldots + r^k > \underbrace{r^k + r^k + \ldots + r^k}_{(k+1)\text{項}} = (k+1) r^k$，

$\therefore \quad 1 - r^{k+1} > (k+1) r^k (1-r)$.

從而，我們可得出 $1 - r^{k+1} + (k+1) r^{k+1} > (k+1) r^k$。

$\therefore \quad kr^{k+1} + 1 > (k+1) r^k$

因爲 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} \ge (kr^{k+1} + 1)\, a_{k+1}$

$\therefore \; a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} > (k+1) r^k a_{k+1}$

$$= (k+1) \sqrt[k+1]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_{k+1}}{(a_{k+1})^{k+1}}}\; a_{k+1}$$

$$= (k+1) \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1}}$$

$\therefore \quad A_{k+1} > G_{k+1}$ 成立。

合併情況(i)及(ii)的結果，可得出 $A_{k+1} \ge G_{k+1}$.

根據數學歸納法原理，可知對所有自然數 n， $A_n \ge G_n$ 皆成立。

方法四

$A_1 = G_1$ 及 $A_2 \ge G_2$ 明顯成立。

假設 $A_k \ge G_k$ 是真確的，其中 k 是一個大於或等於 2 的正整數。

當 $n = k+1$,

情況(i) 若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = a_{k+1}$，則 $A_{k+1} = G_{k+1}$ 明顯成立；

情況(ii)若 $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ 不是盡皆相等，在不失一般性的情況下，可假設 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{k+1}$ 及 $a_1 < a_{k+1}$.

由此可推得 $a_{k+1} > \sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} = G_k$，即 $a_{k+1} - G_k > 0$。

利用歸納法的假設，

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \frac{1}{k+1}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}\right) \\ &= \frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1} \\ &\ge \frac{kG_k + a_{k+1}}{k+1} \\ &= G_k + \frac{a_{k+1} - G_k}{k+1} \end{aligned}$$

利用二項式定理，可得出

$$\begin{aligned} (A_{k+1})^{k+1} &\ge \left(G_k + \frac{a_{k+1} - G_k}{k+1}\right)^{k+1} \\ &= (G_k)^{k+1} + (k+1)(G_k)^k \left(\frac{a_{k+1} - G_k}{k+1}\right) + \cdots \qquad \text{（所有項皆爲正數）} \\ &> (G_k)^{k+1} + (G_k)^k \left(a_{k+1} - G_k\right) \\ &= (G_k)^k a_{k+1} \\ &= (G_{k+1})^{k+1} \end{aligned}$$

$\therefore A_{k+1} > G_{k+1}$ 成立。

合併情況(i)及(ii)的結果，可得出 $A_{k+1} \ge G_{k+1}$.

根據數學歸納法原理，可知對所有自然數 n，$A_n \ge G_n$ 皆成立。

示例二：

平面面積

目標： 證明參數方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$表示的曲線及直線 OA、OB 所包圍的面積是 $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t$ ……………(*)

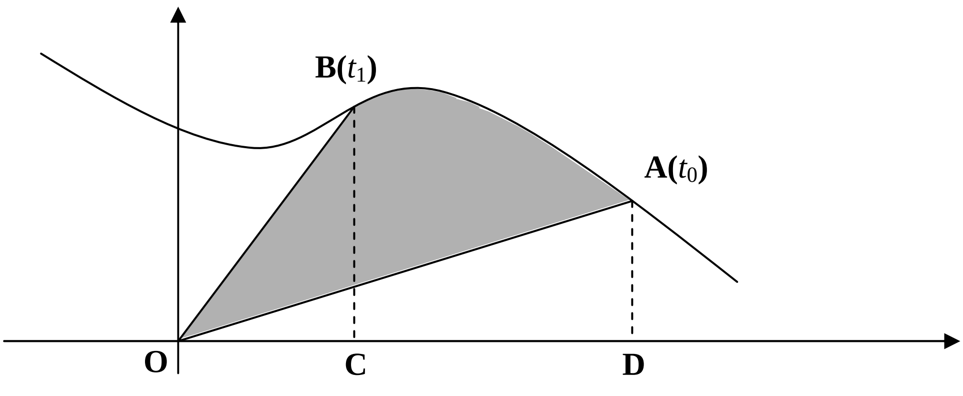
其中 t_0 及 t_1 分別爲曲線上 A 點和 B 點的參數。

預備知識：(1) 應用定積分在笛卡兒坐標系中找出曲線下的面積

(2) 積分基本定理

活動內容：

部份教師習慣利用極坐標系統的方法去證明上述公式(*)。當曲線以極方程 $r=f(\theta)$表示，則曲線與兩條半徑 $\theta=\alpha$、$\theta=\beta$ 所包圍的面積爲 $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2\,\mathrm{d}\theta$。公式(*)可由 $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2\,\mathrm{d}\theta$ 容易導出。有關極坐標系統的內容已從本課程刪除。下面提出一個(*) 的證明方法供教師參考：



上圖是一條以參數方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 表示的曲線。t_0 及 t_1 分別爲曲線上 A 點和 B 點的參數。在不失一般性的情況下，可假設當 t 值增加時，曲線是連續及以逆時針方向變化的。

有陰影部分的面積 $= \Delta$BOC 的面積 $+$ ABCD 的面積 $- \Delta$AOD 的面積

$$= \frac{x(t_1)\,y(t_1)}{2} + \int_{t=t_1}^{t=t_0} y\,\mathrm{d}x - \frac{x(t_0)\,y(t_0)}{2}$$

$$= \frac{x(t_1)\,y(t_1)}{2} + \int_{t_1}^{t_0} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x(t_0)\,y(t_0)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[\,x(t_1)\,y(t_1) - x(t_0)\,y(t_0)] - \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$$

利用積分的第二基本定理（見附錄二第 67 頁）

可得出 $x(t_1)\,y(t_1) - x(t_0)\,y(t_0) = \int_{t=t_0}^{t=t_1} \mathrm{d}[x(t)\,y(t)]$.

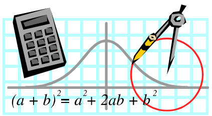
因此，有陰影部分的面積 $= \frac{1}{2}\int_{t=t_0}^{t=t_1} \mathrm{d}\,[x(t)\,y(t)] - \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [x(t)\,y'(t) + x'(t)\,y(t)]\,\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [x(t)\,y'(t) - x'(t)\,y(t)]\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}]\,\mathrm{d}t$$

參數方程 $x=x(t)$、$y=y(t)$、直線 OA 及 OB 所包圍的面積是 $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} [x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}]\,\mathrm{d}t$.



示例三：

二項式定理

目標： 證明正整指數的二項式定理

預備知識： 實係數多項式方程的根與其係數的關係

活動內容：

大部份教師會應用數學歸納法原理去證明正整指數的二項式定理。以下是另下一個方法去證明，對任意正整數 n，

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \ldots\ldots + C_r^n a^{n-r}b^r + \ldots\ldots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

假設 $(x+b)^n = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$，其中 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ 皆爲實數，

因爲方程 $(x+b)^n = 0$ 有 n 個重根 $x = -b$，

方程 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ 有 n 個根 $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 並且 $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = x_n = -b$.

利用實係數多項式方程的根與其係數的關係，可得出

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots\ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots\ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ x_1x_2\ldots x_k + x_1x_2\ldots x_{k+1} + \ldots\ldots + x_{n-k+1}x_{n-k+2}\ldots x_n = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}, \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

在上面第 k 條等式中，左方每一項都是 k 個 x_i 相乘。

因爲 $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = x_n = -b$，

$$\therefore \quad (-b)^k C_k^n = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

因爲 a_n 是二項式 $(x+b)^n$ 展開後 x_n 的係數，可知 $a_n=1$，

$$\therefore \quad a_{n-k} = C_k^n b^k \qquad (k=1, 2, \ldots\ldots, n).$$

換句話說，$a_n = 1 = C_0^n$，$a_{n-1} = C_1^n b$，……，$a_{n-k} = C_k^n b^k$，……，$a_0 = C_n^n b^n$

$$\therefore \quad (x+b)^n = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$= C_0^n x^n + C_1^n b x^{n-1} + C_2^n b^2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-k}^n b^{n-k} x^k + \ldots + C_{n-1}^n b^{n-1} x + C_n^n b^n.$$

以 $x=a$ 代入，可得出

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n b a^{n-1} + C_2^n b^2 a^{n-2} + \ldots + C_{n-k}^n b^{n-k} a^k + \ldots + C_{n-1}^n b^{n-1} a + C_n^n b^n$$

$$= C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \ldots + C_{n-k}^n a^k b^{n-k} + \ldots + C_{n-1}^n a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$