內容	時間分配	教學建議
	10	上列的連詞是一可行的辨法，惟在講解條件式和雙條件式時，重點的說明宜置於「若且」及「若且僅若」的形態，務使學生能充份掌握這兩種廣泛出現於數學研習中的概念。在施教時，教師應提供足夠的相關的生活化事例以助說明，而學生亦應能相對地提供例子以強化學習。整體來說，以課堂的討論形式來引入這些概念的方法比透過純理論的分析方法更爲值得注重。 爲着加強學生對於「充份條件」、「必要條件」和「充要條件」的認知，教師宜就下開所提供的兩命題例子與學生作課堂的討論和探索，從而了解何種條件適用於該等例句中： (1) x 和 y 均爲整數；xy 爲整數。 (2) x 和 y 均爲偶數；x + y 爲偶數。 (3) x 和 y 均爲偶數；x + y 及 xy 均爲偶數。 (4) 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有等根；$b^2-4ac = 0$ 再者，教師亦應將 $(p\rightarrow q)\equiv(\sim q\rightarrow\sim p)$（逆反命題） 的意義運用上列的例句詳加說明和演繹。同時亦可提供一些運用反證法(歸謬法)的論證來作示範，以資鞏固。其中證明 $\sqrt{2}$ 爲無理數者尤爲常用的例子。

單元 **A2**：函數

特定目標：

1. 將函數作爲學習其他數學單元的基本工具。
2. 繪畫及描述不同的函數。

內容	時間分配	教學建議
2.1 函數及其圖像	2	應教導學生認識清楚函數的定義，但函數的嚴格定義可不需深究，並可採用下列方式來說明函數的定義： $f: A\rightarrow B$ ，f 爲一由 A 至 B 的函數 假若 A 集中的每一元素均以某種方式匹配 B 集的唯一元素。A 集稱爲 f 的定義域，B 集稱爲 f 的值域。因函數 f 關係而對應於A集中元素 x 的 B集元素，通常用 f(x)表示，並稱爲 x 在函數 f 下的像。f [A]則稱爲 A 集在函數 f 下的像點集。在此，真值函數的意義須特別強調，因爲它們在本課程的其他單元中有廣泛使用，學生並須懂得如何繪畫函數的圖像。
2.2 函數的性質及運算	4	學生應該清楚知道內射、滿射和對射函數的定義，並能將它們分辨和將它們應用於解答有關問題。教師可採用下列提供的方法： 函數 $f: A\rightarrow B$ 爲 (i) 內射(一個對一個)若且僅若對集 A 中的元素 a_1、a_2，$a_1 \neq a_2$ 蘊涵 $f(a_1) \neq f(a_2)$，或者等價地，$f(a_1) = f(a_2)$ 蘊涵 $a_1 = a_2$； (ii) 滿射若且僅若 $f[A] = B$； (B 集之中的每一元素均爲 A 集之中某一元素的像點。) (iii) 對射(一一對應)若且僅若 f 爲一內射和滿射函數。 此時，教師應該已替學生在反函數 f^{-1} 的定義做好了預備，並可以推論出下列性質： f 爲一對射函數若且僅若其反函數 f^{-1} 存在。 再者，函數與其反函數(如存在的話) 的圖像僅爲直綫 y = x 上的反射。這個性質應利用足夠的例子來加以說明。

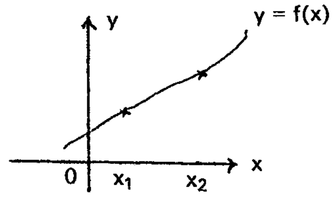
表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議

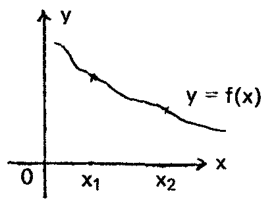
學生應懂得分辨奇函數、偶函數、週期函數、遞增和遞減函數。對於這些函數，應給予學生清楚的定義。至於遞增和遞減函數的定義，在未曾學習微分法之前，可採納以下提供的定義：

(i) f(x) 為一遞增函數(嚴格遞增)若且僅若 $x_2 > x_1$ 蘊涵 $f(x_2) \ge f(x_1)$ $((f(x_2) > f(x_1))$；

(ii) f(x) 為一遞減函數(嚴格遞減)若且僅若 $x_2 > x_1$ 蘊涵 $f(x_2) \le f(x_1)$ $((f(x_2) < f(x_1))$。



f(x) 是嚴格遞增



f(x) 是嚴格遞減

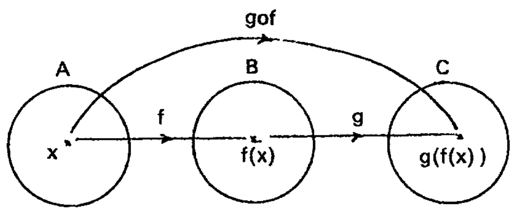
這些性質對繪畫曲綫和計算定積分均甚為有用。

對於函數的運算，教師應與學生討論下列各點：設 f、g 為函數，則 $f+g$、$f-g$、$f \times g$ 及 f/g (在考慮範圍下的所有 x，$g(x) \neq 0$) 均為函數。

至於複合函數，因為它們在微分學中對學習鏈式法則極為重要，故需要給予學生足夠的例子，以便他們能夠掌握複合函數的概念。教師可引用以下例子，並列舉其他真值函數的例子作為解釋。

若函數 $f : A \to B$ 及 $g : B \to C$ 則 f 與 g 的複合函數為 $g \circ f : A \to C$ 及對 A 集內所有元素 x，$g \circ f(x) = g(f(x))$。

內容	時間分配	教學建議



內容	時間分配	教學建議
2.3 代數函數	2	學生應對下列的代數函數有所認識： (*a*) 多項式函數； (*b*) 有理函數 ； (*c*) 冪函數 x^{α}，其中 α 為有理數； (*d*) 由上述各函數的加、減、乘、除和複合而成的其他代數函數、例如 $\sqrt{x^2+1}$ 。
2.4 三角函數及其公式	14	學生應懂得繪畫六個三角函數及其反函數的圖像。下列有關三角函數的基本關係應與學生詳細討論： $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ $\cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$ 學生並應懂得三角函數在 $(\frac{n\pi}{2} \pm \theta)$時的化簡 (當 n 為奇數或偶數)。其餘有關的應用和公式亦應一併教授。 (1) 複角公式 $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

表示刪去的內容

16

內容	時間分配	教學建議
		(2) 倍角公式 $\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\quad = 2\cos^2 A - 1$ $\quad = 1 - 2\sin^2 A$ $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$ (3) 半角公式 $\sin^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}(1-\cos A)$ $\cos^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}(1+\cos A)$ $\sin A = \dfrac{2t}{1+t^2}$ ； $\cos A = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ 其中 $t \equiv \tan\dfrac{A}{2}$ (4) 和及積公式 $\sin A + \sin B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ $\sin A - \sin B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$ $\cos A + \cos B = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

17

內容	時間分配	教學建議
		$\cos A - \cos B = 2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{B-A}{2}$ $\sin A\cos B = \dfrac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))$ $\cos A\sin B = \dfrac{1}{2}(\sin(A+B) - \sin(A-B))$ $\cos A\cos B = \dfrac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))$ $\sin A\sin B = \dfrac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$ 其實；大部份公式均爲基本定義的引申，故此教師應鼓勵學生將它們證明出來，並討論將數式 $a\cos x + b\sin x$ 轉變爲 $r\sin(x+\alpha)$ 或 $r\cos(x+\beta)$的方法。將上述各個公式應用在恒等式的證明和計算三角方程式的解亦應包括在課程內。
2.5 指數函數及對數函數	6	學生應對指數函數和對數函數之間互爲反函數的關係有所認識。對數的定義需加以温習： $\log_a x = y$ 若且僅若 $x = a^y$ 其中 $a > 0$ 和 $a \neq 1$。 對於包含有變數 x 的對數函數，學生應知道它們其實衹是 logx 或函數 f(x)的對數函數而已。例如： $(\log_{10} x)^2$ 和 $\log_e(1+\tan x)$ 等。 對數函數的一些特性應加以學習。 設 $f(x) = \log_a x$ ，其中 $a > 0$ 和 $a \neq 1$； (i) f(x) 衹在 $x > 0$ 上能夠定義； (ii) 當 $a > 1$ 時，f(x)是一遞增函數，而當 $0 < a < 1$ 時，f(x)是一遞減函數； (iii) 當 b、$c > 0$ 及 $b \neq 1$ ， $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$ ； (iv) $f(a) = \log_a a = 1$ ； (v) $f(1) = \log_a 1 = 0$ 。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		對於指數函數，應教導學生相應的處理方法。設 a 爲一正常數和 x 爲一變數，則函數 a^x 爲一指數函數。其特性爲： 設 $f(x) = a^x$　其中 $a > 0$ 和 $a \neq 1$， (i)　f(x) 對所有實數均可定義； (ii)　當 $a > 1$ 時，f(x)爲遞增函數而當 $0 < a < 1$，f(x)則爲遞減函數； (iii)　$f(0) = a^0 = 1$。 學生應懂得繪畫下列圖像： (i)　對數函數 $f(x) = \log_a x$　當 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ (ii)　指數函數　當 $a > 1$ 和 $0 < a < 1$ 在此時，教師可引領學生去擴闊他們在對數函數和指數函數的認識。 (i)　$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (ii)　$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ 和 (iii)　$\log_e x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$。 〔請注意 (iii) 僅爲對數函數的另一定義而已，$\log_e x$ 可寫爲 $\ell n\, x$〕 對數函數和指數函數的性質應予討論。 對數函數　$f(x) = \log_a x$　其中 $a > 0$，$a \neq 1$， (i)　$f(x) + f(y) = f(xy)$ (ii)　$f(x) - f(y) = f(\frac{x}{y})$ (iii)　$f(x^n) = nf(x)$

18

內容	時間分配	教學建議
		指數函數　$g(x) = a^x$　其中 $a > 0$ (i)　$g(x + y) = g(x) \cdot g(y)$ (ii)　$g(x - y) = \frac{g(x)}{g(y)}$ (iii)　$g(nx) = (g(x))^n$ 至於函數 e^x 和 $\ell n\, x$ 在學習數學時的重要性應加以指出。
	28	

19

表示刪去的內容