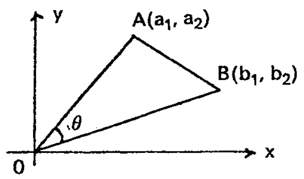
單元 A4：不等式

特定目標：

1. 學習不等式的基本性質。
2. 證明簡單絕對不等式。
3. 解簡單條件不等式。

內容	時間分配	教學建議
4.1 絕對不等式	6	學生應能正確地運用符號 $a > b$ 及 $a \geq b$。教師應和學生溫習不等式的基本性質，其中應包括 (i) 對一任意實數 x，$x^2 \geq 0$ (ii) 若 $a > b > 0$ 及 n 為一正整數，則 $a^n > b^n$ 及 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ (iii) 若 $a > b > 0$ 及 $x > y > 0$，則 $ax > by$； 惟無須涉及這些基本性質之嚴謹證明。學生應能從這些基本性質推算出簡單的絕對不等式。處理絕對不等式的證明，教師可強調以下的技巧： *例*： 證明 $E_1 \geq E_2$ 證： $E_1 - E_2 = \ldots\ldots$ $= \ldots\ldots$ $= \ldots\ldots$ ≥ 0 $\therefore E_1 \geq E_2$
4.2 **A.M. ≥ G.M.**	4	作為 A.M. ≥ G.M. 的初步認識，教師可提供最多至四個變數的證明，而不強調此定理的一般性證明。若有需要，教師可用反向歸納法去證明此定理。學生須要懂得如何運用此結果至 n 個變數。
4.3 柯西——許瓦爾茲不等式	3	學生應理解二次式 ax^2+bx+c 恒為正數的充要條件為 $a>0$ 及 $b^2-4ac<0$，並應能利用此結果去解如「若 $cx^2+4x+c+3$ 恒為正數，其中 x 為實數，求 c 之範圍。」的問題。柯西——許瓦爾茲不等式可從上述結果證明。

內容	時間分配	教學建議
		n = 2 的柯西——許瓦爾茲不等式的幾何意義可從坐標平面得出。 $\cos\theta = \dfrac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA\cdot OB}$ $= \dfrac{(a_1^{\,2}+a_2^{\,2})+(b_1^{\,2}+b_2^{\,2})-\left[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2\right]}{2\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}\ \sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}}$ $= \dfrac{(a_1b_1+a_2b_2)}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}}$ $\cos^2\theta = \dfrac{(a_1b_1+a_2b_2)^2}{(a_1^{\,2}+a_2^{\,2})(b_1^{\,2}+b_2^{\,2})}$ 因為 $\cos^2\theta \leq 1$， $\therefore (a_1b_1+a_2b_2)^2 \leq (a_1^{\,2}+a_2^{\,2})(b_1^{\,2}+b_2^{\,2})$ 學生應能應用此不等式去解有關的簡單問題。 
4.4 條件不等式	7	學生宜溫習實綫上的區間概念。實數的絕對值的定義及性質應予討論。學生應能解綫性不等式、一元二次不等式及一元高次不等式。教師應和學生討論含有絕對值的不等式解法，例如 $\lvert ax^2+bx+c \rvert \geq d$，$\lvert x-a \rvert + \lvert x-b \rvert \geq c$ 及 $(x-a)\lvert x-b \rvert \geq c$。教師亦應對如 $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ 形式的不等式加以討論，其中 P(x)及 Q(x)均為多項式。上述不等式的複合不等式亦應給予指導。
	20	

表示刪去的內容