單元 A7：$\mathbf{R}^2$及 $\mathbf{R}^3$的向量

特定目標：

1.學習 R^2及 R^3的向量運算。
2.理解向量的綫性相關及綫性無關的概念。
3.向量在幾何問題上的應用。

內容	時間分配	教學建議

7.1 向量及純量的定義 1

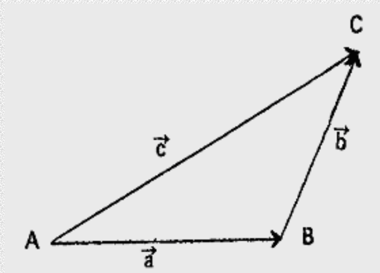
教師應在此單元開始時對學生解釋向量及純量的分別和介紹表示向量的圖解及寫法。現行的向量記法（如 $\overrightarrow{AB}$ 、**AB**、 $\vec{a}$ 、**a**）及向量大小的記法（如 $|\overrightarrow{AB}|$ 、|**AB**|、$|\vec{a}|$ 、|**a**|）都應教授。下列各項 ： 零向量、單位向量、等向量、負向量、共綫向量及共面向量亦應定義。

7.2 向量的運算 7

學生應認識向量加法定律〈即三角形定律、平行四邊形定律及多邊形定律〉，向量減法及純量乘法。

28

(i) 三角形定律

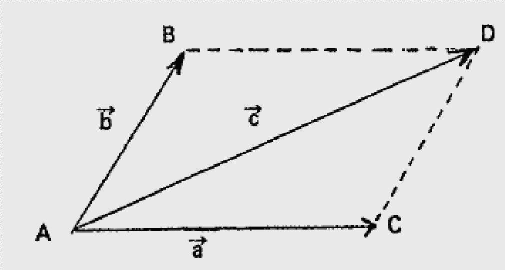


$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$
或
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

當使用此定律求 $\vec{a}+\vec{b}$ 時，教師須指出向量 $\vec{a}$ 的終點應與向量 $\vec{b}$ 的始點重疊。亦應讓學生注意當 A、B 及 C 點共綫時，此定律仍然適用。

內容	時間分配	教學建議

(ii) 平行四邊形定律

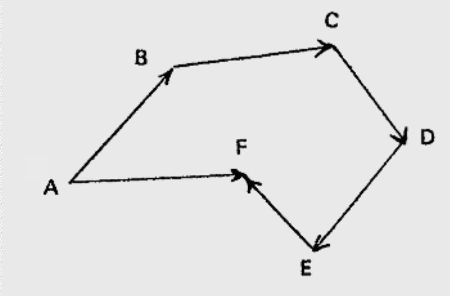


$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$$
或
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

29

同樣地，教師應提醒學生向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的始點應重疊，而在上兩圖中 $\vec{c}$ 可視爲 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的向量和。三角形定律和平行四邊形定律的等價性是值得討論的。

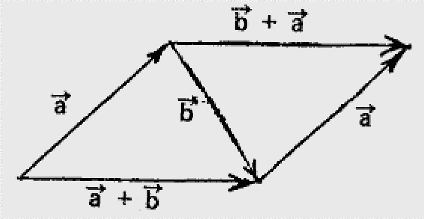
(iii) 多邊形定律

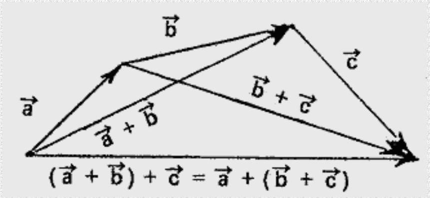


$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$$

表示刪去的內容

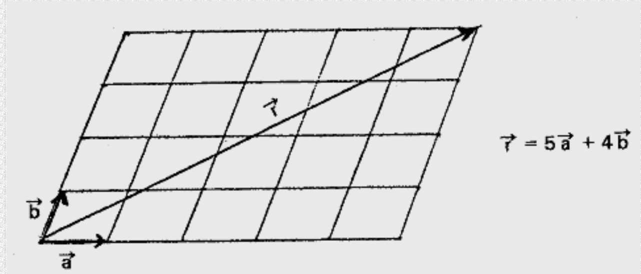
30

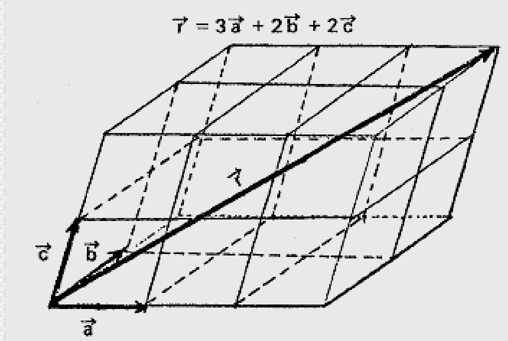
<table>
<tr><th>內容</th><th>時間分配</th><th>教學建議</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
向量代數定律如交換律、結合律和分配律應介紹給學生認識。下列各圖有助解釋各性質。
(a) 加法交換律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$


(b) 加法結合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$


(c) 純量乘法結合律：
$(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$
純量乘法分配律：
$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$
$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$
明白純量乘法概念後，學生應不難得出：
若 $\vec{a}=\alpha\vec{b}$，其中 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 爲非零向量而 α 爲一些純量，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 是平行向量。
</td></tr>
</table>

31

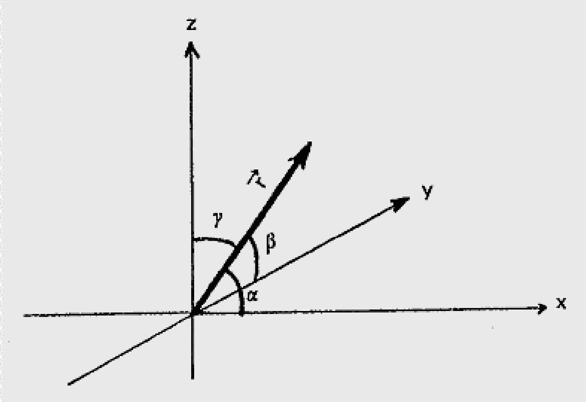
<table>
<tr><th>內容</th><th>時間分配</th><th>教學建議</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>
學生應清楚在 $\mathbf{R}^2$ 及 $\mathbf{R}^3$ 中將向量分解爲分量及以分量和表示另一向量的方法。$\mathbf{R}^2$ 中的向量分解可以下列例子介紹。在第一個例子中，向量 $\vec{r}$ 分解爲兩個分別在方向 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的向量 $5\vec{a}$ 及 $4\vec{b}$，由此可推廣至 $\mathbf{R}^2$ 中 $\vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$，其中 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 爲不共綫向量和在 $\mathbf{R}^3$ 中 $\vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，其中 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 爲非共面向量和 α、β 及 γ 爲純量。
例：
1.


2.


再者，教師應和學生討論以向量分量表向量的純量乘法、加法及減法。
</td></tr>
</table>

表示刪去的內容

32

內容	時間分配	教學建議
7.3 於直角坐標系中的向量分解	2	教師應詳細解釋 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 及 $\vec{k}$ 分別是在正 x－軸、 y－軸及 z－軸的單位向量和在 $\mathbf{R}^2$ 及 $\mathbf{R}^3$ 中任一向量可用 $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ 表示。 學生須認識以 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 表示的向量的性質： (i) $\lvert a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\rvert=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (ii) 若 $a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$ ， 則向量 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ 與 $\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ 平行。 再者，教師應用圖解釋向量 $\vec{r}$ 的方向比、方向餘弦及方向角。下列性質亦應加以討論。 (i) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (ii) $\dfrac{\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ 。 

33

內容	時間分配	教學建議
7.4 向量的綫性組合	4	教師應說明下列定義： (i) 若 $\vec{r_1}$ ， $\vec{r_2}$ ， $\vec{r_3}$ ，…， $\vec{r_n}$ 爲一個向量集，則 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\ldots+\lambda_n\vec{r_n}$ ，其中 λ_1 ， λ_2 ， λ_3 ，…， λ_n 爲純量，稱爲 $\vec{r_1}$ ， $\vec{r_2}$ ， $\vec{r_3}$ ，…， $\vec{r_n}$ 的向量綫性組合。若各純量 λ 非全爲零，則此綫性組合稱爲非平凡，否則爲平凡綫性組合。 (ii) 若向量 $\vec{r_1}$ ， $\vec{r_2}$ ， $\vec{r_3}$ ，…， $\vec{r_n}$ 存在一等於零的非平凡綫性組合，則它們稱爲綫性相關，即 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\ldots+\lambda_n\vec{r_n}=\vec{0}$ ，其中有部分 $\lambda_i\neq 0$ ， $i=1$，2，3，…，n。 (iii) 若向量 $\vec{r_1}$ ， $\vec{r_2}$ ， $\vec{r_3}$ ，…， $\vec{r_n}$ 的唯一等於零的綫性組合就是平凡綫性組合，則它們稱爲綫性無關，即若 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\ldots+\lambda_n\vec{r_n}=\vec{0}$ ，則 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\ldots=\lambda_n=0$ 。 教師應協助學生由(ii)得出一個即時結果，就是向量 $\vec{r_1}$ ， $\vec{r_2}$ ， $\vec{r_3}$ ，…， $\vec{r_n}$ 爲綫性相關當且僅當其中一個向量是同組中其他向量的綫性組合。 在 $\mathbf{R}^2$ 及 $\mathbf{R}^3$ 中綫性相關向量的幾何意義應加以說明。如 (i) 在 $\mathbf{R}^2$ 中，向量 $\vec{r_1}$ 及 $\vec{r_2}$ 爲綫性相關當且僅當它們是平行向量； (ii) 在 $\mathbf{R}^3$ 中，向量 $\vec{r_1}$ 、 $\vec{r_2}$ 及 $\vec{r_3}$ 爲綫性相關當且僅當它們是共面向量。
7.5 純量（點）積及向量（叉）積	6	兩個向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的純量積，寫作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ，定義爲 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$ ，其中 θ 爲 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 之間的夾角。下列各性質應加以討論： 1. 純量積的交換律： $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 2. 純量積的分配律： $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ 3. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2$ 4. 兩非零的向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 爲正交當且僅當 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 5. $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議

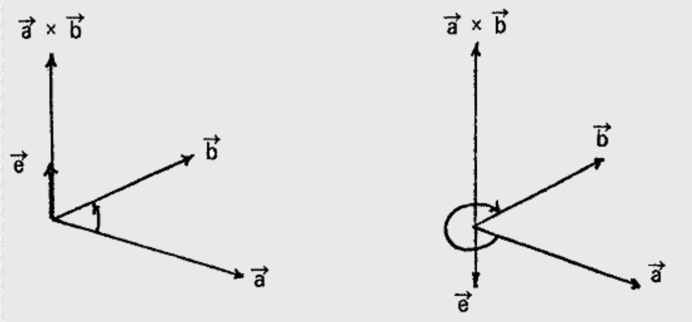
34

教師應特別指出由第 5 點用純量積可求出以笛卡兒分量表示兩向量的交角。教師應指導學生求證 $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$ 、 $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ 等及 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ 、 $\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ 、 $\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$ 。

向量積的定義須清楚介紹，教師亦應特別說明右手系統的正確方法。兩向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的向量積，寫作 $\vec{a}\times\vec{b}$ ，定義爲 $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\vec{e}$ ，其中

(i) $\vec{e}$ 爲垂直於 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的單位向量；

(ii) θ爲由 $\vec{a}$ 量度至 $\vec{b}$ 的角度，而量度是根據右手法則來決定 $\vec{e}$ 的方向。



下列各性質有討論的必要：

(i) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

(ii) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ 及 $(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$

(iii) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

(iv) $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

內容	時間分配	教學建議

學生應自已求證 $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$ 、 $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ 等用來計算以笛卡兒分量表示兩向量 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ 及 $\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ 的向量積，

$$\vec{r_1}\times\vec{r_2}=(b_1c_2-b_2c_1)\vec{i}+(c_1a_2-c_2a_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k} \quad 或$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$$

下列兩個性質有助學生掌握向量積的概念：

(i) 兩非零向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 平行當且僅當 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$；

(ii) $|\vec{a}\times\vec{b}|$ 可視爲由向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所組成的平行四邊形的面積。

35 **7.6** 向量在幾何的應用 | 11

教師應詳細解釋相對向量的用途，包括位置向量和位移向量。P 及 Q 兩點對基準點 O 的位置向量通常分別以 $\overrightarrow{OP}$ 、 $\overrightarrow{OQ}$ 或 $\vec{p}$ 、 $\vec{q}$ 表示，而 $\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}$ 亦應加以強調。

教師應導出下列結果而其他有關的推論亦值得討論。

分點的位置向量：

設 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 及 $\vec{p}$ 分別爲 A、B 及 P 對基準點 O 的位置向量。若 P 以 m:n 的比分綫段 AB，則 $\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ 。

內分點與外分點的處理方法應分別討論。爲準備學生學習通過 A、B 兩點的直綫的向量方程，建議採用公式 $\vec{p}=\dfrac{k\vec{a}+\vec{b}}{1+k}$ 。在笛卡兒坐標系中，若 A 爲$(x_1，y_1，z_1)$、$B(x_2，y_2，z_2)$ 及 $P(x，y，z)$，學生不難得到一直綫的兩點式

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ 。$$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議

36

於此，學生應先學會寫出向量 $\vec{b}-\vec{a}$ 的方向數，從而將兩點式轉爲

(i) 對稱式

$$\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$ 及

(ii) 參數式

$x = x_1 + \ell$

$y = y_1 + m$

$z = z_1 + n$　　其中 $\ell : m : n$ 代表直綫的方向數。

作爲一個延續，通過點 $(x_1，y_1，z_1)$ 而法綫的方向比爲 $\ell : m : n$ 的平面方程可作爲純量積的應用：

$$\ell(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$$

在此，平面方程的通式 $Ax+By+Cz+D=0$ 亦可介紹作爲補充材料，並討論下列各性質。

(i) 平面法綫的方向比爲 $A : B : C$。

(ii) 由點 $P(x'，y'，z')$到平面的垂直距離爲

$$\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$，其中符號的選擇在使整個表達式爲正數。

(iii) 兩平面

$\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 及

$\pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的夾角 θ 可由下式求得

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$。

(iv) $\pi_1 // \pi_2$ 當且僅當 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$；

$\pi_1 \perp \pi_2$ 當且僅當 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$。

內容	時間分配	教學建議

37

(v) 平分兩個平面 π_1 及 π_2 的夾角的平面方程爲

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$。

由綫及平面的普通知識，教師可引導學生知道 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 代表兩平面 π_1 及 π_2 (若不平行) 的相交綫，而這直綫的方向比爲

$$\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\B_2 & C_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\C_2 & A_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}$$。

下列有關方向比爲 $p : q : r$ 的直綫 L 及平面 π: $Ax + By + Cz + D = 0$ 的性質應予討論：

(i) $L // \pi$ 當且僅當 $Ap + Bq + Cr = 0$

(ii) $L \perp \pi$ 當且僅當 $\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$

(iii) L 與 π 的夾角 θ 由下式得出

$$\sin\theta=\left|\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\right|$$

兩直綫共面的條件亦應學習，即兩直綫共面當且僅當此兩直綫相交或平行。假若

L_1 是 $\frac{x-a_1}{p_1}=\frac{y-b_1}{q_1}=\frac{z-c_1}{r_1}$ 及

L_2 是 $\frac{x-a_2}{p_2}=\frac{y-b_2}{q_2}=\frac{z-c_2}{r_2}$，

L_1 與 L_2 共面當且僅當 $\begin{vmatrix}a_1-a_2 & p_1 & p_2\\b_1-b_2 & q_1 & q_2\\c_1-c_2 & r_1 & r_2\end{vmatrix}=0$

在此小單元中，教師應鼓勵學生應用向量方法來導出上述的性質和結果，尤其是利用點積求一向量 $\vec{p}$ 在另一向量 $\vec{r}$ 上的投影及利用叉積求一個給定三頂點的三角形面積。

31

表示刪去的內容