單元 A8：矩陣

特定目標：

1. 學習矩陣的概念及運算。
2. 學習二階方陣及三階方陣的性質和運算及其行列式。
3. 矩陣在二維幾何上的應用。

內容	時間分配	教學建議
8.1 矩陣及其運算	4	教師應介紹一個有 m 行和 n 列矩陣的通式，即 $m \times n$ 矩陣。學生應清楚矩陣的運算：加法、減法、乘法和純量乘法及其性質。一般來說，對於矩陣 A 和 B，$AB \neq BA$，教師應予以解釋。教師應介紹以下各名詞：零矩陣、單位矩陣和倒置矩陣。
8.2 二階及三階方陣	9	教師應定義方陣和其行列式，並清楚指出奇異矩陣和非奇異矩陣的概念及應用。學生應能計算矩陣的行列式和求出非奇異矩陣的逆矩陣，並知道下列有關逆矩陣和行列式的性質： A. 逆矩陣的性質 (i) 一矩陣的逆矩陣是唯一的。 (ii) 一矩陣存在逆矩陣當且僅當它是非奇異。 (iii) 若 A 為非奇異，則 $AB = 0$ 蘊涵 $B = 0$。 (iv) 若 A 為非奇異，則 $AB = AC$ 蘊涵 $B = C$。 (v) 若 A、B 為非奇異，λ 為非零純量及 n 為正整數， 則 AB、A^{-1}、A^t、λA、A^n 為非奇異及 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$， $(A^{-1})^{-1} = A$， $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$， $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$， $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$。 B. 行列式的性質 (i) 若一行列式中有兩行（或兩列）全等或成比例，則此行列式的值是零。 (ii) 若一行列式中有兩行（或兩列）互換，則此行列式的數值不變但符號改變。

內容	時間分配	教學建議
		(iii) 若一行列式的行換作列（或列換作行），則其值不變，即是 $\det A^t = \det A$ 或 $\|A^t\| = \|A\|$。 (iv) 若將一行列式中任何一行（或列）的每一分子乘以同一數，則其值亦乘以此一數。 (v) 兩同階方陣乘積的行列式等於該兩方陣行列式的乘積，即是 $\det AB = \det A \cdot \det B$ 或 $\|AB\| = \|A\|\ \|B\|$。
8.3 於二維幾何的應用	8	學生應熟悉以矩陣表示一點和一向量；及反射、旋轉、放大、位移、平移及其合成的矩陣表示法。下列各例為部分以 2×2 矩陣表示的變換： (i) 對直綫 $y = (\tan\theta)x$ 的反射，以矩陣 $A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$ 表示。 (ii) 繞原點旋轉 ϕ 角，以矩陣 $B = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ 表示。 (iii) 對原點以比例因子 $k \neq 0$ 放大，以矩陣 $C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 表示。 (iv) 以因數 k 平行於 x 一軸位移，以矩陣 $D = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 表示。 對於 (iii) 及 (iv)，應討論對形狀和面積的影響。教師應對學生解釋清楚在上述各種變換下，所有滿足 $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$，其中 T 代表一種變換，的每一點 P(x， y)都會轉到一新點 P′(x′，y′)。熟習各變換的合成對學生明白矩陣乘積很重要。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		例： 先對直綫 $y=(\tan\theta)x$ 反射跟著繞原點旋轉 ϕ 角的結果，正如上文所提及，可以乘積 BA 表示，其中 $BA\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$。留意此乘積是由右至左解釋為：先應用變換 A 再應用變換 B。 如下的合成變換亦可提出： *例*： 以方程組 $\begin{cases}x'=y+2\\y'=-x+4\end{cases}$，其矩陣表示法為 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ 的變換。 矩陣 $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ 代表變換是對原點順時針方向旋轉 90°。因此，它可視為一旋轉再跟著平移。若以（3，1）為定點，此變換可視作為對（3，1）順時針方向旋轉 90°。
	21	

40

單元 A9：二元及三元綫性方程組

特定目標：

1. 利用高斯消去法解綫性方程組。
2. 認識解的存在性及唯一性。

內容	時間分配	教學建議
9.1 高斯消去法及梯陣式	5	適合下列兩個性質的矩陣稱為梯陣式： (1) 首 k 行非零；其餘各行為零。 (2) 每一非零行的第一個非零元素為 1，並出現在前一行第一個非零元素的右列。 *例*： 以下 5×8 矩陣是梯陣式： $\begin{pmatrix}0&1&*&*&*&*&*&*\\0&0&1&*&*&*&*&*\\0&0&0&0&1&*&*&*\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ 學生應懂得利用高斯消去法解二元及三元的綫性方程組，方法就是利用行的基本運算將一矩陣變為梯陣式。 *例*： 解方程組 $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=2\\3x_1+x_2-2x_3=1\\4x_1-3x_2-x_3=3\\2x_1+4x_2+2x_3=4\end{cases}$ 增廣矩陣 $\begin{pmatrix}1&2&1&2\\3&1&-2&1\\4&-3&-1&3\\2&4&2&4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&-5&-5&-5\\0&-11&-5&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\sim\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&-11&-5&-5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

41

表示刪去的內容