單元 A10：複數

特定目標：

1. 學習複數的性質、幾何表達法及應用。
2. 學習棣美弗定理及其在求複數的 n 次根、解多項式方程和證三角恒等式的應用。

內容	時間分配	教學建議
10.1 複數的定義及其算術運算	3	教師應簡單介紹符號 i。數 $z = x + yi$，其中 x、y 爲實數，稱爲複數，而 x、y 分別稱爲複數的實部(Re z)和虛部(Im z)。當 $x = 0$，$y \neq 0$，$z = yi$ 稱爲純虛數；當 $y = 0$，$z = x$ 則爲實數。 教師可問學生應如何定義複數等式，但須指出複數並無次序性質。 兩個複數的和、差、積及商亦應給予定義。
10.2 阿根圖、輻角和共軛	6	學生應知道以下各項的定義：複數 z 的模 $\lvert z \rvert$ 、輻角 arg z、輻角的主值和它的共軛複數 $\bar{z}$ 。 複數 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 的模輻形式亦可寫爲 $z = r\,\mathrm{cis}\theta$ 。 學生應理解下列複數的性質： (i) $\lvert z_1z_2 \rvert = \lvert z_1 \rvert \lvert z_2 \rvert$ (ii) $\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$ ，其中 k 爲整數。 (iii) $\lvert \frac{z_1}{z_2} \rvert = \frac{\lvert z_1 \rvert}{\lvert z_2 \rvert}$ (iv) $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$ ，其中 k 爲整數且 $z_2 \neq 0$ 。 教師應教授下列共軛複數的性質： 1. $\bar{\bar{z}} = z$ 2. $\bar{z} = 0$ iff $z = 0$ 3. 一個複數是自共軛當且僅當其爲實數。

內容	時間分配	教學建議
		4. $z \cdot \bar{z} = \lvert z \rvert^2$ 5. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ 6. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ 7. $\overline{z_1z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ 8. $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ， $z_2 \neq 0$ 利用此等性質，學生不難證明： 如α是實係數多項式方程的根，則 $\bar{\alpha}$ 亦爲其根；即是若實係數多項式方程的根不是實數，則必以共軛偶(對) 形式出現。 學生應知道下列不等式： (i) $\lvert \mathrm{Re}\, z \rvert \leq \lvert z \rvert$ (ii) $\lvert \mathrm{Im}\, z \rvert \leq \lvert z \rvert$ (iii) $\lvert z_1 + z_2 \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert$ (三角不等式) 學生亦可用類似方法證明： $\lvert z_1 - z_2 \rvert \geq \lvert z_1 \rvert - \lvert z_2 \rvert$ 和 $\lvert z_1 - z_2 \rvert \geq \lvert z_2 \rvert - \lvert z_1 \rvert$ 。 三角不等式可用數學歸納法推廣至： $\lvert z_1 + z_2 + \ldots + z_n \rvert \leq \lvert z_1 \rvert + \lvert z_2 \rvert + \ldots + \lvert z_n \rvert$ 。 學生須學習複數在阿根圖的幾何表達法，並應知道實軸和虛軸。教師亦應教授複數的極形式的表達法及其幾何意義。可介紹 $\mathrm{cis}\theta$ 的另一記法 $e^{i\theta}$ 給學生，固此 $z = re^{i\theta}$ ； 此記法稱爲複數的指數形式或歐拉形式。
10.3 於平面幾何的簡易應用	5	學生應知道三角不等式的幾何意義，並須學習複數在平面幾何的多種用途，以下爲兩例： 1. 在阿根圖上，XYZ 爲等邊三角形，而其外心在原點上; 若 X 代表複數 1 + i，求 Y 和 Z 所代表的複數。

表示刪去的內容

46

內容	時間分配	教學建議
		2. 若 z_1、z_2 和 z_3 為代表一等邊三角形頂點的三個相異複數，則 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2$ 。 學生應學習在阿根圖上移動點的軌跡的例子，以下為兩個簡單例子： 1. 求出點 z 的軌跡，使得｜$z-a$｜$=k$，其中 a 是一複數和 k 為一正常數。 2. 求出點 z 的軌跡，使得 $\left\|\dfrac{z-a}{z-b}\right\|=k$ ，其中 a、b 為複數，k 為不同值的正常數。,
10.4 棣美弗定理		
10.4a 有理數指數的棣美弗定理	3	學生應學習證明當 n 是正整數時，下列定理成立： $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 此處假定 $(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$ 。 當 n 是負整數時，可設 $n=-m$，m 為一正整數，學生亦應能證明定理在 n 為負整數時也成立。但當 $n=\dfrac{p}{q}$ ，其中 p、q 為整數，$q\neq 0$，證明須待學生完成複數 n 次根的學習方可進行。
10.4b 於三角恒等式的應用	3	由棣美弗定理 $\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ ，其中 n 為一正整數，可將 $\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$. 寫成 $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$. 的乘方。 設 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，則可利用 $\begin{cases} z+\dfrac{1}{z}=2\cos\theta \\ z-\dfrac{1}{z}=2i\sin\theta \end{cases}$ 和 $\begin{cases} z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta \\ z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin n\theta \end{cases}$

內容	時間分配	教學建議
10.4c 複數的 n 次根及其幾何解釋	~~5~~ 4	將 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的乘方表為倍角的正弦和餘弦。例如，學生應能將 $\cos^4\theta\sin^3\theta$ 表為倍角的正弦的和 及 $\cos^3\theta\sin^4\theta$ 表為倍角的餘弦的和。 學生應學習複數 n 次根的定義；並須詳細學習 1 的 n 次根(即 n 次單位根)。以下數例可供課堂討論 ： 1. 求 -1 的五次根。 2. 解方程 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ 。 3. 求 $1+i$ 的立方根。 4. 因式分解 $z^{2n}-2z^n\cos n\theta+1$ 為實二次因式。
	~~25~~ 24	

47

表示刪去的內容