單元 B1：序列、級數及其極限

特定目標：

1. 學習序列和級數的概念。
2. 認識序列和級數的極限的直觀概念。
3. 認識無窮序列和無窮級數的特性。

48

內容	時間分配	教學建議
1.1 序列及級數	6	序列和級數的概念應該清楚地提出。下列的介紹方法可供參考： 若 a_n 爲對應正整數 n 可定義的函數，其數值 a_1，a_2，a_3，…a_n，…則可組合成一序列。至於該序列爲有限或無限則須視乎項數是有限或無限。再者，$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ 則稱爲級數。至於該級數爲有限或無限必須視乎其所包括的數目而定。下列爲常用記法： $S_n = \sum_{r=1}^{n} a_r$ 或 $\sum_{1}^{n} a_r$ 有關序列和級數的簡易運算及法則應予介紹。爲方便起見，序列 a_1，a_2，a_3，…和 b_1，b_2，b_3…可用$\{a_i\}$和$\{b_i\}$表示，則 (i) $\{a_i\} \pm \{b_i\} = \{a_i \pm b_i\}$ (ii) $\lambda\{a_i\} = \{\lambda a_i\}$ 亦即，可涉及項與項之間的運算概念。 對級數求和法，可參考下列方法： (1) 數學歸納法：本課程中單元 A3 已有提及。 (2) 求差方法：教師應強調級數中第 r 項可寫爲 f(r + 1)及 f(r)之差，其中 f(x)爲 x 的函數。即 若 $a_r = f(r+1) - f(r)$ 則 $\sum_{1}^{n} a_r = \sum_{1}^{n} [f(r+1) - f(r)]$ $= f(n+1) - f(1)$ $\sum_{1}^{n} \frac{1}{r(r+1)}$ 及 $\sum_{1}^{n} r(r+1)$ 就是其中一些典型例子。

49

內容	時間分配	教學建議
		若級數的項是可以用下列遞推關係表達的話： $a_r - a_{r-1} = f(r)$ 或 $a_r = Aa_{r-1} + Ba_{r-2}$ 以下是找出 a_r 的解的方法：(特別適用於後者) 設α、β爲輔助方程 $\lambda^2 = A\lambda + B$ 的根， (i) 若$\alpha \neq \beta$，則 $a_r = k_1\alpha^r + k_2\beta^r$ (ii) 若$\alpha = \beta$，則 $a_r = (k_1 + rk_2)\alpha^r$ 其中 k_1 和 k_2 爲待定常數。
1.2 序列及級數的極限	7	序列的極限概念應以直觀方式教授，下列方式可作參考： 設 a_1，a_2，…，a_n，…爲一序列，對一任意大的數值 n，則 a_n 與一常數 ℓ 的差爲一任意小的正數，我們亦可以寫爲 當 $n \to \infty$ 時 $a_n \to \ell$，或 $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$。 教師應同時強調下列各點： (i) ℓ 稱爲該序列的極限。 (ii) 若極限 ℓ 是存在的話，則必是唯一的極限。 (iii) 該序列在 ℓ 收斂，或該收斂序列的極限爲 ℓ。 (iv) 若一序列並不收斂於任何極限，則稱爲發散序列。 並應提供充足的收斂和發散序列的例子以作說明。此等例子如下： (1) $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$，其中 a > 0。 (2) 序列 $a_n = \frac{\sin \frac{1}{2} n\pi}{n}$ 收斂於極限 0。 (3) 發散序列 $a_n = \{1 + (-1)^n\}\sqrt{n}$。 (4) 振動發散序列 $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		注意：序列可分爲收斂，發散(至 $+\infty$ 或 $-\infty$)或振動（並不收斂或發散至 $+\infty$ 或 $-\infty$ ）不同類別。 收斂序列的一般性質亦應與學生討論： 設 a_1，a_2，a_3，…，a_n，… 和 b_1，b_2，b_3，…，b_n，…爲收斂序列，其極限分別爲 a 和 b，則下列序列亦具收斂性質。 (i) λa_1，λa_2，λa_3，…. 收斂於 λa，其中 λ 爲一常數。 (ii) a_1+b_1，a_2+b_2，a_3+b_3，… 收斂於 $a+b$ 。 (iii) a_1b_1，a_2b_2，a_3b_3，…收斂於 ab。 (iv) $\frac{a_1}{b_1}$ ，$\frac{a_2}{b_2}$ ，$\frac{a_3}{b_3}$ ，…收斂 $\frac{a}{b}$ ，假若 $b\neq 0$。 最後學生應在老師指導下認識到下列因果關係： (i) 設收斂序列 a_1，a_2，a_3，…的極限爲 a， 則 $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$ ，其中 k 爲一正整數。 (ii) 設 a_1，a_2，a_3，…和 b_1，b_2，b_3，…爲兩收斂序列，其極限同爲 ℓ；而若另一序列 c_1，c_2，c_3，…，其中當 $i>k$，k 爲一正整數，$a_i\le c_i\le b_i$，則 c_1，c_2，c_3，…亦爲收斂，而且其極限亦是 ℓ。該性質通常稱爲迫近定理，教師可將單調序列和有界序列加以介紹，以便擴闊學生對序列的認識。 至於無窮級數方面，教師可用類似如下的處理方法： (1) 收斂概念 若 $\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} u_i = S$ 存在，則級數 $u_1+u_2+u_3+\ldots$爲收斂，並且可稱 S 爲級數的總和。若用 S 表示 $u_1+u_2+\ldots+u_n$，則其結果可寫成爲： 當 $n\to\infty$ 時，$S_n\to S$ 或 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ($S_n=u_1+u_2+\ldots+u_n$ 通常稱爲第 n 個的部份和）在類似情況下，教師可選擇引入發散和振動的概念。

內容	時間分配	教學建議
1.3 序列及級數的收斂性	5	(2) 收斂級數的性質 若 $u_1+u_2+u_3+\ldots$的極限爲 S 和 $v_1+v_2+v_3+\ldots$的極限爲 S’ 則 (a) $\lambda u_1+\lambda u_2+\lambda u_3+\ldots$收斂於 λS， λ 爲一常數； (b) $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+(u_3+v_3)+\ldots\ldots$收斂於 $S+S'$； (c) 若 $u_1+u_2+u_3+\ldots$收斂，則 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ 。 介紹收斂序列的特性，如 (i) 收斂序列爲有界 (ii) 單調而有界的序列爲收斂 此外，一些典型的收斂序列和發散序列亦應加以討論，並以下列之實例說明計算序列極限的方法。 (A) 收斂序列 (i) $a_n = x^n$ ，設 $\lvert x\rvert < 1$ (ii) $a_n = \sqrt[n]{n}$ (iii) $a_n = \frac{x^n}{n!}$ (B) 收斂級數 (i) $r+r^2+r^3+\ldots$ ，設 $\lvert r\rvert<1$ (ii) $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$ (iii) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$ (iv) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		(C) 發散級數 (i) $\Sigma \frac{1}{n}$ (ii) $\Sigma (1-\frac{1}{n})^n$ (iii) $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}}$ 此方法應包括迫近定理的典型應用例題，但毋須對收斂性的測試再作深究。
	18	

52

單元 B2：極限、連續性及可微性

特定目標：

1. 理解函數的極限的直觀概念。
2. 理解函數的連續性及可微性的直觀概念。
3. 認識極限作爲微積分的基本概念。

53

內容	時間分配	教學建議
2.1 函數的極限	5	函數的極限應以直觀方式介紹。其實，在 $x=a$ 時，函數 $y=f(x)$的極限概念應與序列的極限概念連繫起來。當自變量經過一收斂序列$\{x_n\}$(橫坐標序列)，其極限爲 a 時，則可考慮其直坐標序列$\{f(x_n)\}$。故此當$\{x_n\}$趨近 a 時，則 $\{f(x_n)\}$ 趨近一有限值 ℓ 之情況，應可清楚而明確地表達，即是 若 $x \to a$ 則 $f(x) \to \ell$ 或 $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ 部份教師可能會將重點放在當 x 與 a 爲相當接近時，則 f(x)與 ℓ 之間的差異可以任意的小的概念上，從而強化當 $x \to a$ 時， $f(x) \to \ell$ 的理解。 但必須向學生指出，函數值 f(a) 的存在，並不能引申爲極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 的存在及等於 f(a)，縱使在一般情況下可成立。教師可參考下列例子： $f(x)=\begin{cases}1 & 當\ x\neq 0\\ 0 & 當\ x=0\end{cases}$ 這裏 f(0) = 0 和 $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ 自變量趨近極限 a 的途徑應加以注意：當 x 的值是由左至右增加時，函數的極限稱爲左方極限，以 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 表示；當 x 的值是由右至左遞減時，極限稱爲右方極限，以 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 表示。 由此，教師不難引導學生理解當 $x \to a$ 時，函數 f(x)的極限存在當且僅當其左方極限和右方極限相等。至於對極限作更廣泛理解，教師應討論 $x \to \infty$ 的情況，使學生再一次明白當 x 趨於一足夠大的數時，f(x)與 ℓ 的的差異可任意的小，並表爲 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ 。

表示刪去的內容