內容	時間分配	教學建議
	18	(C) 發散級數 (i) $\Sigma \frac{1}{n}$ (ii) $\Sigma (1-\frac{1}{n})^n$ (iii) $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}}$ 此方法應包括迫近定理的典型應用例題，但毋須對收斂性的測試再作深究。

單元 B2：極限、連續性及可微性

特定目標：

1. 理解函數的極限的直觀概念。
2. 理解函數的連續性及可微性的直觀概念。
3. 認識極限作爲微積分的基本概念。

內容	時間分配	教學建議
2.1 函數的極限	5	函數的極限應以直觀方式介紹。其實，在 $x=a$ 時，函數 $y=f(x)$的極限概念應與序列的極限概念連繫起來。當自變量經過一收斂序列$\{x_n\}$(橫坐標序列)，其極限爲 a 時，則可考慮其直坐標序列$\{f(x_n)\}$。故此當$\{x_n\}$趨近 a 時，則 $\{f(x_n)\}$ 趨近一有限值 ℓ 之情況，應可清楚而明確地表達，即是 若 $x \to a$ 則 $f(x) \to \ell$ 或 $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ 部份教師可能會將重點放在當 x 與 a 爲相當接近時，則 f(x)與 ℓ 之間的差異可以任意的小的概念上，從而強化當 $x \to a$ 時，$f(x) \to \ell$ 的理解。 但必須向學生指出，函數值 f(a) 的存在，並不能引申爲極限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 的存在及等於 f(a)，縱使在一般情況下可成立。教師可參考下列例子： $f(x)=\begin{cases}1 & 當\ x \neq 0 \\ 0 & 當\ x = 0\end{cases}$ 這裏 $f(0) = 0$ 和 $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ 自變量趨近極限 a 的途徑應加以注意：當 x 的值是由左至右增加時，函數的極限稱爲左方極限，以 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 表示；當 x 的值是由右至左遞減時，極限稱爲右方極限，以 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 表示。 由此，教師不難引導學生理解當 $x \to a$ 時，函數 f(x)的極限存在當且僅當其左方極限和右方極限相等。至於對極限作更廣泛理解，教師應討論 $x \to \infty$ 的情況，使學生再一次明白當 x 趨於一足夠大的數時，f(x)與 ℓ 的的差異可任意的小，並表爲 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$ 。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		下列函數的極限性質應包括在討論範圍內： (i) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$ (ii) $\lim_{x\to a}[kf(x)]=k\lim_{x\to a}f(x)$ ，k 與 x 無關 (iii) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$ (iv) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$ ，其中 $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ (v) 若 $f(x)\le h(x)\le g(x)$ 在 x 接近 a 時成立，而且 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\ell$ ，則 $\lim_{x\to a}h(x)=\ell$ 。 一些重要的極根，如下列者，應予以介紹： (1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (2) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$ (3) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=e^a$ (4) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (5) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ell n\ a$ ；a > 0 (6) $\lim_{x\to 0}\frac{\ell n(1+x)}{x}=1$ (7) $\lim_{x\to 1}\frac{\ell n\ x}{x-1}=1$ 教師應給予學生足夠的計算函數極限的練習以便強化他們在這方面的訓練。

內容	時間分配	教學建議
2.2 函數的連續性	4	函數的連續性的定義是應以函數的極限作爲基礎，以及用直觀的方法加以解釋，不宜涉及$\varepsilon-\delta$ 的概念。教師可參考下列建議： 若 $\lim_{x\to a}f(x)$ 存在兼且等於 f(a)，則函數 f(a)在 x = a 連續。 若函數在某區間內的每一點連續，則函數在該區間內連續。 在引入函數於一點的不連續性前，應討論一些常見的函數，例如： (i) $f(x)=x^2$ 在任何區間內皆連續。 (ii) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 並非在整個區間 $0\le x\le 5$ 內連續。 上述概念並不需要作嚴謹的處理，但教師宜提供廣泛而合適的例子，以便加強學生在這方面的認識，並理解若兩函數在 x = a 連續，則它們的和、差及乘積在該點亦爲連續，而當分母不等於零時，它們的商亦爲連續。教師應引用一些在整段實數綫上皆爲連續的例子，以啓發學生進一步的認識： (i) 多項式函數 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ (ii) 指數函數 $f(x)=a^x$ ；a > 0 (iii) 對數函數 $f(x)=\log_a x$ ；a >0， $a\neq 1$ (iv) 三角函數，例如 sin x 、cos x 對於合成函數的連續性，教師可採納下列方式： 設 $y=f[g(x)]$ 爲一合成函數，其內函數 g(x) 在 x = a 連續，其外函數 y = f(t)在 t = g(a)亦爲連續，則合成函數 y = f[g(x)]在 x = a 連續。 教師可強調每一連續函數的連續函數亦爲連續。 教師應指出在一區間內的連續函數擁有一系列值得注意的性質，並加以討論，但不宜作嚴謹的證明。這些性質包括： (i) 若函數 f(x)在閉區間 [a，b]內連續，其中 f(a)= A 和 f(b) = B，$A\neq B$，則 f(x)在 A 與 B 之間的每一數值取值一次或以上。(介值定理) (ii) 閉區間上的連續函數必爲有界。

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		(iii) 閉區間上的連續函數必有其極大和極小值。 (性質 (ii) 和 (iii) 稱爲魏爾斯脫拉斯定理)
2.3 函數的可微性	4	函數 f(x) 在 x= a 的可微性定義如下： 函數 f(x) 在 x= a 上可微當且僅當極限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 或 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在。 教師應同時指出若一函數在某點可微， 則函數在該點連續，而連續性祇是可微性的必要條件而並非充分條件。並且，函數在 x = a 的導數定義就是上述極限的值。學生可透過上述學習理解可微性的概念。函數 f(x) 在 x = a 的導數可表爲 $f'(a)$ 、 $\left.\frac{d}{dx}f(x)\right\|_{x=a}$ 或 $\left.\frac{dy}{dx}\right\|_{x=a}$ 教師應提及若函數在一區間內每一點皆可微，則該函數在該區間內可微，兼且在區間內的每一 x 值，皆對應於函數在該點的導數 f'(x)，因此 f'(x)亦爲 x 的函數，稱爲 f(x)的導函數。 在這階段，教師應預備充足例題以便學生能掌握微分法的概念和技巧，至於從基本原理求取一些典型函數的導數，尤爲重要。故此，足夠的練習是不可缺少的。下列例子可作參教考： (1) 利用第一求導法則，找出下列函數於各點的導數： (i) x^2於 x = 1 (ii) e^x於 x = 0 (iii) sinx 於 $x=\frac{\pi}{4}$ (2) 利用第一求導法則，求下列函數的導數： (i) $f(x) = x^n$ 其中 n 爲一正整數 (ii) $f(x) = e^x$
	13	

單元 **B3**：微分法

特定目標：

1. 掌握微分法的不同技巧。
2. 學習及掌握求高階導數的技巧。
3. 理解洛爾定理及中值定理的直觀概念。

內容	時間分配	教學建議
3.1 微分法的基本法則	4	作爲延續，教師應講解以下法則： (1) $\frac{d}{dx}(k)=0$ ，其中 k 爲常數 (2) $\frac{d}{dx}(x^r)=rx^{r-1}$ ，r 爲實數 (3) $\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)\pm\frac{d}{dx}g(x)$ (4) $\frac{d}{dx}[kf(x)]=k\frac{d}{dx}f(x)$ ，其中 k 爲常數 (5) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=g(x)\frac{d}{dx}f(x)+f(x)\frac{d}{dx}g(x)$ (積法則) (6) $\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$ ， $g(x)\neq 0$ (商法則) 教師可提供以上法則的証明，藉以加強學生在概念上及技巧上的掌握。從(3)至(6)，要強調 f(x)及 g(x)的導數的存在。關於(2)，對 r 爲整數的証明已足夠，對 r 爲實數的証明可留待至學生已學習鏈式法則及對數微分法。教師應列舉一些常見的函數以示範使用以上法則求導數。
3.2 三角函數的微分法	2	教師應講解以下函數的微分法 ： 1. sin x 2. cos x

表示刪去的內容