| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
|---|---|---|
| | | (iii) 閉區間上的連續函數必有其極大和極小值。<br>(性質 (ii) 和 (iii) 稱爲魏爾斯脫拉斯定理) |
| **2.3** 函數的可微性 | 4 | 函數 f(x) 在 x = a 的可微性定義如下：<br>函數 f(x) 在 x = a 上可微當且僅當極限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 或 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在。<br><br>教師應同時指出若一函數在某點可微， 則函數在該點連續，而連續性祇是可微性的必要條件而並非充分條件。並且，函數在 x = a 的導數定義就是上述極限的值。學生可透過上述學習理解可微性的概念。函數 f(x) 在 x = a 的導數可表爲<br>$f'(a)$ 、 $\dfrac{d}{dx}f(x)\Big\vert_{x=a}$ 或 $\dfrac{dy}{dx}\Big\vert_{x=a}$<br><br>教師應提及若函數在一區間內每一點皆可微，則該函數在該區間內可微，兼且在區間內的每一 x 值，皆對應於函數在該點的導數 f'(x)，因此 f'(x)亦爲 x 的函數，稱爲 f(x)的導函數。<br><br>在這階段，教師應預備充足例題以便學生能掌握微分法的概念和技巧，至於從基本原理求取一些典型函數的導數，尤爲重要。故此，足夠的練習是不可缺少的。下列例子可作參教考：<br>(1) 利用第一求導法則，找出下列函數於各點的導數：<br>(i) $x^2$ 於 x = 1<br>(ii) $e^x$ 於 x = 0<br>(iii) sinx 於 $x=\dfrac{\pi}{4}$<br>(2) 利用第一求導法則，求下列函數的導數：<br>(i) $f(x) = x^n$ 其中 n 爲一正整數<br>(ii) $f(x) = e^x$ |
| | 13 | |



## 單元 **B3**：微分法

### 特定目標：

1. 掌握微分法的不同技巧。
2. 學習及掌握求高階導數的技巧。
3. 理解洛爾定理及中值定理的直觀概念。

| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
|---|---|---|
| **3.1** 微分法的基本法則 | 4 | 作爲延續，教師應講解以下法則：<br>(1) $\dfrac{d}{dx}(k)=0$ ，其中 k 爲常數<br>(2) $\dfrac{d}{dx}(x^r)=rx^{r-1}$ ，r 爲實數<br>(3) $\dfrac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)]=\dfrac{d}{dx}f(x)\pm\dfrac{d}{dx}g(x)$<br>(4) $\dfrac{d}{dx}[kf(x)]=k\dfrac{d}{dx}f(x)$ ，其中 k 爲常數<br>(5) $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)]=g(x)\dfrac{d}{dx}f(x)+f(x)\dfrac{d}{dx}g(x)$ (積法則)<br>(6) $\dfrac{d}{dx}[\dfrac{f(x)}{g(x)}]=\dfrac{g(x)\dfrac{d}{dx}f(x)-f(x)\dfrac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$ ， $g(x)\neq 0$ (商法則)<br><br>教師可提供以上法則的証明，藉以加強學生在概念上及技巧上的掌握。從(3)至(6)，要強調 f(x)及 g(x)的導數的存在。關於(2)，對 r 爲整數的証明已足夠，對 r 爲實數的証明可留待至學生已學習鏈式法則及對數微分法。教師應列舉一些常見的函數以示範使用以上法則求導數。 |
| **3.2** 三角函數的微分法 | 2 | 教師應講解以下函數的微分法 ：<br>1. sin x<br>2. cos x |





表示刪去的內容

| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
|---|---|---|
| | | 3. $\tan x$<br>4. $\operatorname{cosec} x$<br>5. $\sec x$<br>6. $\cot x$<br><br>教師可鼓勵學生作出以上的證明，並提示學生(4)至(6)的證明可使用商法則。 |
| **3.3** 複合函數及逆函數的微分法 | 4 | 複合函數 $y = f[g(x)]$的導數可透過鏈式法則<br>$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$<br>或 $=f'(t)g'(x)$，其中 $t=g(x)$，求得。<br>$y = f(x)$ 的逆函數 $x = f^{-1}(y)$ 的導數，可利用 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 求得。<br><br>教師可用以下例子作示範：<br>$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$ 、$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$ 、$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$ 及<br>$\frac{d}{dx}(x^{-n})$ 、$\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}})$，其中 n 爲正整數。 |
| **3.4** 隱函數的微分法 | 2 | 隱函數 $F(x，y) = 0$ 的微分法，可利用上述各法則，對於自變數 x，求方程各項的導數。教師應給予示例，加強與學生的討論，下列是一些建議：<br>(i) 若 $x\cos y^3 + y\sin 2x = 1$，求 $\frac{dy}{dx}$。<br>(ii) 已知 $2x^2 - y^2 + 12x - 2y + 3 = 0$，求在點(2，5) 的導數 $\frac{dy}{dx}$。<br>(iii) 對 $\cos(x^2 - y^2) = xy$，求 $\frac{dy}{dx}$。 |



| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
|---|---|---|
| **3.5** 參數方程的微分法 | 2 | 對於用參數方程 $x = u(t)$，$y = v(t)$ 表達的函數 $y = f(x)$，y 可被表爲對 t 的複合函數 $y = f(u(t))$。透過鏈式法則，可得出 $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$，故此 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 或 $f'(x)=\frac{v'(t)}{u'(t)}$。學生需明白在求導時。$u(t)$ 及 $v(t)$必須爲可微的及 $u'(t)\neq 0$。<br><br>教師可示範以下求 $\frac{dy}{dx}$ 的例子：<br>(i) 橢圓 $x = a\cos t$，$y = b\sin t$<br>(ii) 旋輪綫 $x = a(t-\sin t)$，$y = a(1-\cos t)$ |
| **3.6** 對數函數及指數函數的微分法 | 6 | 教學範圍包括以下法則，教師可使用建議的方法提供證明：<br>1. $\frac{d}{dx}(\ell n\ x)=\frac{1}{x}$ (用 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ )<br>2. $\frac{d}{dx}e^x=e^x$ (用 $\frac{d}{dx}\ell n\ y=\frac{1}{y}$ 及鏈式法則，其中 $y = e^x$ 或應用逆函數的求導法則)<br>3. $\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x\ \ell n\ a}$<br>4. $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ \ell n\ a$<br><br>教師應提供如下列的例子：<br>$e^{x^3}$ 及 $\log_a\sqrt{x^2+1}$ 。<br>(注意：爲求完整起見，教師可與學生討論，對n爲有理數及實數，公式 $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ 的證明。)<br><br>教師應強調一些應用對數微分法的例子，例如： |



表示刪去的內容

| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
|---|---|---|
| | | 當 y 爲 x 的複雜的函數，尤其當 y 涉及變數指數，導數 $\frac{dy}{dx}$ 可從對數微分法求得。下列是一些常見的例子：<br>$y=x^x$ 及 $y=\frac{(x+a)(x+b)}{(x+c)(x+d)}$ 。 |
| **3.7** 高階導數及萊布尼茲定理 | 5 | 教師應引入高階導數的定義及符號 $f''(x)$、$f^{(n)}(x)$、$\frac{d^n y}{dx^n}$ 的意義。此外，學生亦應能求以參數方程表達的函數的高階導數和應用萊布尼茲定理 $\frac{d^n}{dx^n}(uv)=\sum_{r=0}^{n}C_r^n u^{(n)} v^{(n-r)}$ 。學生可嘗試以數學歸納法證明此定理。教師應示範以萊布尼茲定理求涉及函數的高階導數的方程，尤其涉及隱函數，下列是一些例子：<br>1. 求 $\cos^2 x\sin x$ 和 $x^3\cos x$ 的 n 階導數。<br>2. 設 $f(x)=\tan^{-1}x$ 。證明 $(1+x^2)f''(x)+2xf'(x)=0$ 及求對 $x=0$ ，f(x)的n階導數。<br>3. 已知 $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ 。<br>證明 $f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \text{若 n 爲偶數}\\ -n! & \text{若 n 爲奇數}\end{cases}$ ，<br>其中 n 爲整數及 $n\ge 3$ 。 |
| **3.8** 洛爾定理及中值定理 | 3 | 教師應講解洛爾定理和中值定理的直觀概念及其幾何意義。對於能力較高的學生，則可提供定理的證明。學生應學習簡單及直接應用定理的題目。可考慮下列問題 ：<br>1. 若對所有在某區間內的x值， $f'(x)=0$ ，則f(x)在該區間內爲一常數。<br>2. 若對所有在某區間內的x值， $f'(x)=g'(x)$ ，則f(x)與g(x)在該區間內的差爲一常數。 |



| 內容 | 時間分配 | 教學建議 |
|---|---|---|
| | | 3. 證明若 $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+...+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$ ，則方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ 在 0 與 1 之間有至少一個根。 |
| | 28 | |



表示刪去的內容