單元 B4：微分法的應用

特定目標：

1. 學習和使用洛必達法則。
2. 學習微分法的應用。

內容	時間分配	教學建議
4.1 洛必達法則	4	引入以下待定型的極限： $\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$， 0^0，∞^0，1^∞。 首先宜展示上述形式出現的例子。教師應講解洛必達法則 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 以處理 $\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 待定型的極限。以下例題可作考慮： 1. $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos^2\pi x}{e^{2x}-2ex}$ 2. $\lim_{x\to a^+}\frac{\ell n\sin(x-a)}{\ell n\tan(x-a)}$ 教師應強調必須先簡化 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 然後才計算極限，而此過程可不斷重覆直至 $\lim_{x\to a}\frac{f^{(m)}(x)}{g^{(m)}(x)}$ 已定型。至於其他待定型的極限，可引入例題以展示該等極限可轉化爲待定型 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的樣子，使可應用洛必達法則。以下例題可作考慮： 1. $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\cot x)$ 2. $\lim_{x\to 0^+}x^x$

內容	時間分配	教學建議
		3. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ 而洛必達法則的證明則不包括在內。
4.2 變率	3	藉着一些常用的量，如速度和加速度等，引入並詳細討論 $\frac{dy}{dx}$ 作爲 y 對於 x 的變率。 可考慮以下例題： 1. 一雪球溶化時，其體積以恒速度x cm^3/s.減少。當其半徑爲a cm時。求其 (a) 半徑的變率； (b) 表面面積的變率。 2. 一移動中的質點與一定點在時間 t的位移 x爲 $x=a\sin t+b\cos t$。 (a) 求該質點在時間 t 的速度和加速度，並描述其運動。 (b) 證明在時間 t，其速度可表明爲 $\sqrt{a^2+b^2-x^2}$ 。
4.3 單調函數	2	作爲開始，教師可引述以下直觀且顯而易見的結果： 若 $f'(a)>0$，則對所有小過但充份接近 a 的 x 值 $f(x)<f(a)$，及對所有大過但充份接近 a 的 x 值 $f(x)>f(a)$。 從幾何的角度看，以上結果可引伸至此語句：當 $x=a$ 時 f(x)是嚴格地遞增。(注意：討論中的函數是連續和可導的。)相似的描述亦可用於當 $x=a$ 時，f (x)是嚴格地遞減的。由此，單調遞增的概念可被表達如下： 若對所有在該區間的 x 值 $f'(x)>0$，則 f(x)在該區間內爲一單調遞增的函數。 教師應引導學生得出以下重要結果： 若在區間 (a，b)內，$f'(x)>0$、函數 f(x)在 $x=a$連續及 $f(a)\ge 0$，則 f(x)在該區間內便爲正數。 單調遞減函數的處理亦可用相同方法處理，學生可提供類似的描述。 以上結果在證明一些如下的不等式時有着重要的相關性：

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議

(i) $(1+x)^{\alpha} \le 1+\alpha x$ ，對 $0<\alpha<1$ 及 $x \ge -1$

(ii) $(1+x)^{\alpha} \ge 1+\alpha x$ ，對 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 及 $x \ge -1$

(iii) $\sin x > x - \frac{x^3}{3!}$ ，對 $x>0$

內容	時間分配	教學建議
4.4 極大和極小	5	藉着引入曲綫的斜度的定義，教師應解釋及強調導數作爲曲綫的斜度的幾何含意。關於此點，教師可一再加強學生對曲綫的遞增或遞減的圖像理解。

當學生巳熟習以上知識後，教師可引導學生掌握辨認局部極大點及局部極小點(即曲綫的轉向點)的能力。學生要學習以下關於判斷局部極值的情況：

對函數f(x)，
(a) 求 a 致使 $f'(a)=0$ 及
(b) 檢查 $f''(a)=0$ 的符號或檢查在 a的鄰域中 $f'(x)$ 的符號改變。

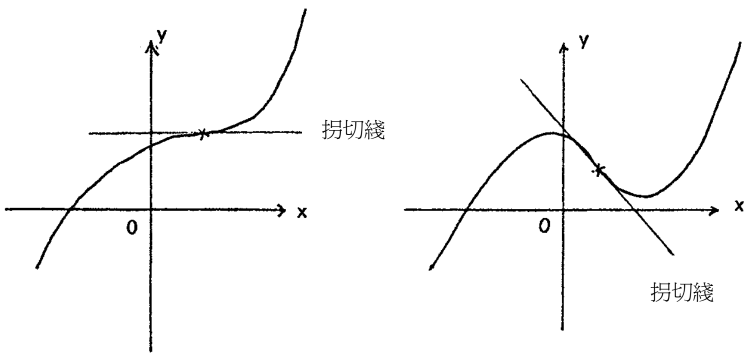
教師應提醒學生以下事項：
(i) 局部或相對極值未必爲全局或絶對極值；
(ii) 轉向點可於導數不存在的地方出現，如 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 及 $y = |x|$；
(iii) 平穩點的導數爲零；
(iv) $f'(a)=0$ 未能充份地判定 $x=a$ 能給出局部極值，如 $x^3 \sin\frac{1}{x}$ 及 x^3 。

教師應討論及示範與以上技巧有關的例題。接鬟可討論拐點，常用的方法如下:
(a) 求 a 致使 $f''(a)=0$
(b) 檢查在 a 的鄰域中 $f''(x)$ 的符號改變。

教師應提醒學生以下事項：
(i) 於拐點，其導數未必相等於零；
(ii) $f''(a)=0$ 未能充份地判定 $x=a$ 能給出拐點，如 x^4 。

因此，一些能展示不同方向的拐切綫的圖像會有很大的幫助。

內容	時間分配	教學建議



最後，對於當函數的定義域擴大或縮小時與其絶對値的關係，教師可加以簡單解釋。

內容	時間分配	教學建議
4.5 曲綫描繪	6	本課題開始前，學生先要學習求出曲綫上存在鬟的垂直、水平及斜漸近綫。講解時，教師宜運用例題以作解釋。例如：曲綫 $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ 。

學生應明白到垂直漸近綫可於不連續點出現，然後再學習當 x 趨向無限大時函數的表現，例如 $\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1} \to x$ 當 x 爲充份地大，所以可理解到 $y=x$ 爲一漸近綫。

在完成本課題時，教師應幫助學生尋找、選取及組織所有有關的資料，以便能有系統地描繪曲綫。以下事項値得注意：

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議

(1) 對稱於兩軸 ： 檢查方程以探查對稱性

(a) 如無y的奇數冪出現，曲綫則對稱於 x 軸 ；

(b) 如無x的奇數冪出現，曲綫則對稱於 y 軸 ；

例如： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 是對稱於兩軸。

(2) x 及 y 的値域的限制

例如：(a) 對 $y^2=4x$ ，x必爲非負數，而y則可取所有值。

(b) 對 $x^2y^2=a^2(x^2-y^2)$ ，可寫成 $y^2=\frac{a^2x^2}{x^2+a^2}$ ，所以x可取所有值；但當寫成 $x^2=\frac{a^2y^2}{x^2-y^2}$ ，明顯地 $|y|<a$。事實上，此曲綫是包含在漸近綫 $y=\pm a$ 內。

(3) 與兩軸的截距或任何在曲綫上容易見到的點。

例如：對 $y=\frac{x(x+2)}{x-2}$ ，曲綫的 x 截距爲 -2 及 0；而曲綫僅與 y 軸相交於原點。

(4) 極大、極小及拐點。

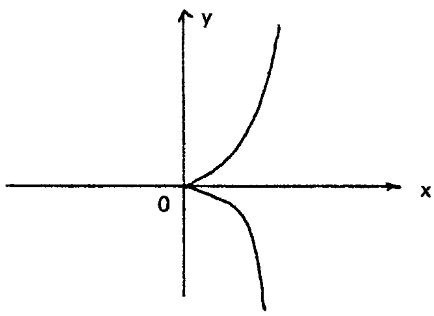
(5) 曲綫的漸近綫。

爲了全面的學習這課題，教師在例題中要多提點學生須注意的地方。對於三角函數，學生要注意曲綫的週期。至於用參數方程表達的曲綫則沒有特定要注意的法則，較好的方法就是儘量求得相對的笛卡兒方程然後描繪。

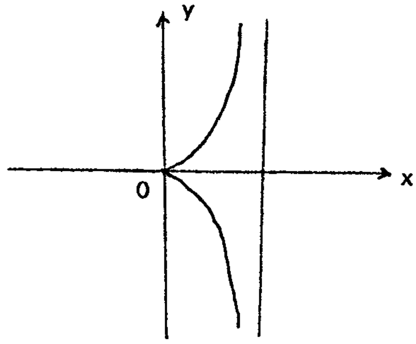
教師應描繪一些能示範以上步驟常見的例子給學生參考。以下例子可作考慮：

內容	時間分配	教學建議

1. $y^2=ax^3$

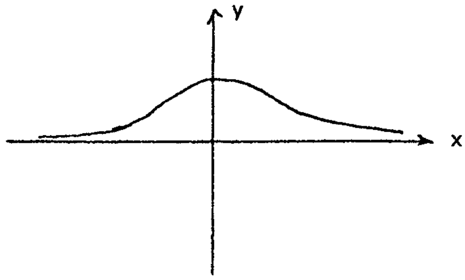
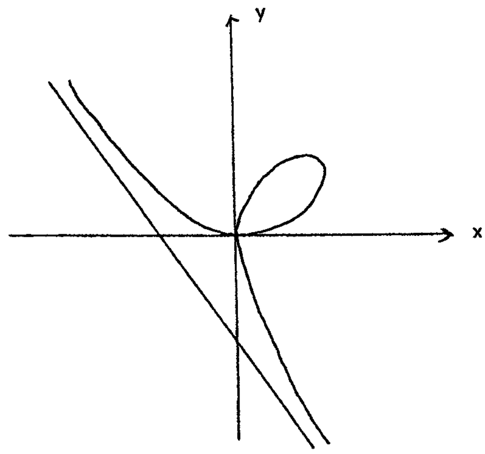


2. $y^2(a-x)=x^3$

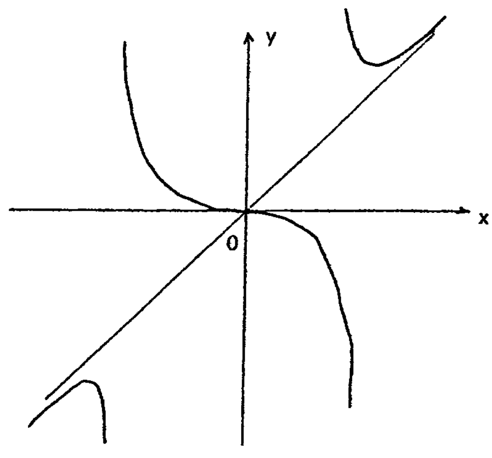


表示刪去的內容

68

內容	時間分配	教學建議
		3. $y = \frac{1}{x^2 + a^2}$  4. $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ 

69

內容	時間分配	教學建議
		5. $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ 
	20	

表示刪去的內容