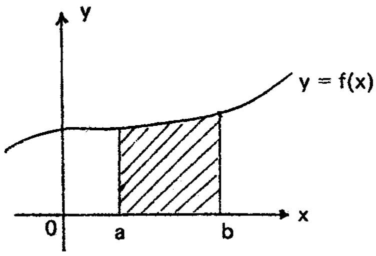
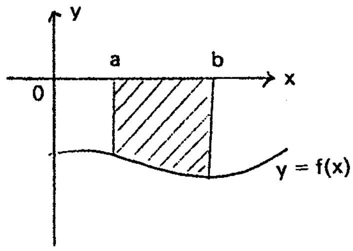
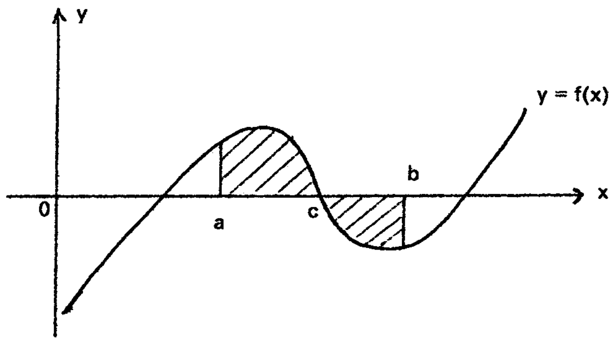
單元 B6：積分法的應用

特定目標：

1. 學習應用定積分來計算平面面積、弧長及旋轉體的體積及旋轉曲面面積。
2. 應用定積分計算和的極限。

內容	時間分配	教學建議
6.1 平面面積	5	作爲定積分定義的延續，由曲綫 $y = f(x)$、垂直綫 $x = a$、$x = b$ 及 x－軸包圍的面積可以根據有關函數的性質(即函數圖像在 x－軸之上或之下)用下列方法計算出來。 情況(1)：當 $y = f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 內連續及非負，則面積可以下式表示 $\int_a^b f(x)dx$  情況(2)：當 $y=f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 內連續及非正，則面積可以下式表示 $-\int_a^b f(x)dx$ 

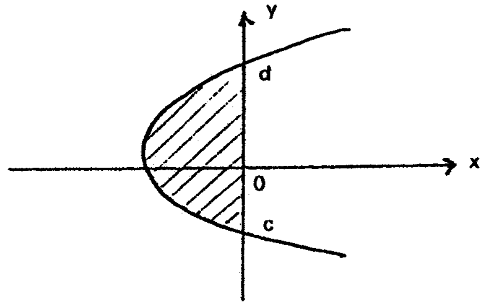
內容	時間分配	教學建議
		情況(3)：當 $y = f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 內連續及取値時正時負，則可以下列簡例的程序求其面積。  面積表示式爲 $\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$ 。 教師宜提醒學生在計算圖像在 x－軸之下的面積時應留意加入負號，並應鼓勵學生先作函數草圖以獲得更清晰的了解。

表示刪去的內容

86

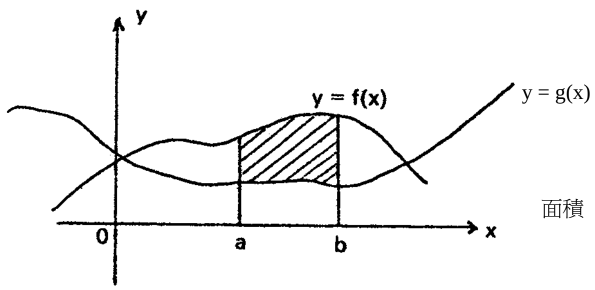
內容	時間分配	教學建議

教師也應就曲綫圖像與 y－軸所圍成的面積的各個不同情況詳加闡釋， 下面是一個例子。



面積表示式爲 $-\int_c^d x\,dy$ 。

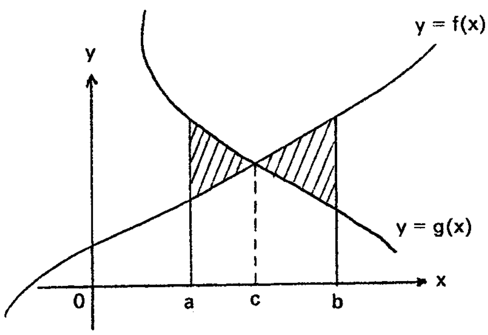
至於由兩條曲綫所圍成的面積的計算，教師可與學生詳細討論下列圖示的方法及其變着，並應利用足夠的例子加以說明。



面積 $= \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

87

內容	時間分配	教學建議

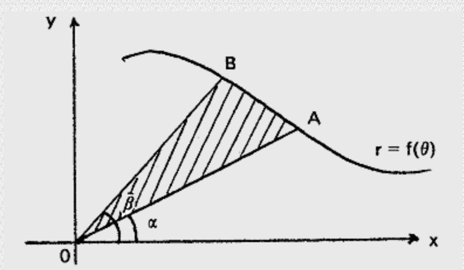


面積= $\int_a^c [g(x)-f(x)]dx$

$+$

$\int_c^b [f(x)-g(x)]dx$

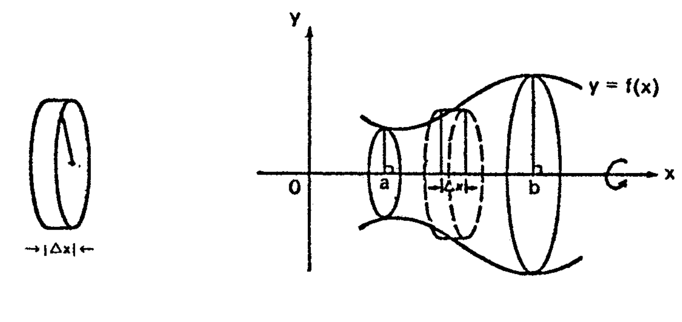
當曲綫以極方程 r = f(θ) 表示，則曲綫與兩半徑圍成的面積爲 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$ 。



表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		當曲綫以參數方程形式表示時，例如 x = x(t)；y = y(t)，則所圍成的面積以下式表示 $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$ ，其中 A 及 B 點的參數分別為 t_0 及 t_1。 要令學生掌握計算面積的技巧，教師宜引入更多例子，包括不同方法及其變着，使學生有更深入的了解。下列例子可加入考慮： (1) 求拋物綫 $y^2 = 5-x$ 及直綫 $y = x+1$ 所圍成的面積。(註：此面積可以對 x 或對 y 積分而求得，教師宜示範兩個方法。) (2) 證明心臟綫 $r = a(1+\cos\theta)$ 所圍成之面積為 $\frac{3a^2\pi}{2}$ 。 (3) 利用橢圓的參數方程 $x = a\cos\theta$；$y = b\sin\theta$，證明橢圓的面積為 πab。(註：教師宜指導學生利用圖像的特別幾何性質，例如對稱性質，去簡化計算過程。)
88 **6.2 弧長**	3	曲綫 y = f(x)在兩點 x = a 及 x = b 之間的弧長以 $\int_a^b\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ 表示。 若曲綫以參數形式 x = x (t)；y = y (t)表示，則由 $t = t_1$ 至 $t = t_2$ 之間的弧長為 $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$ 。 若曲綫以極形式 r = r(θ)表示，則由 $\theta = \alpha$ 至 $\theta = \beta$ 之 間的弧長為 $\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\,d\theta$ 。 教師可用下列建議的例子作說明或與學生討論之用。 (1) 證明閉合曲綫（星形綫）$x = a\cos^3\theta$ ； $y = a\sin^3\theta$ 的周界為 6a。(曲綫圖形的對稱性可加利用) (2) 證明心臟綫 $r = a(1 + \cos\theta)$ 的周界長度為 4a。 (3) 求曲綫 $x^3 = 8y^2$ 由 x = 1 至 x = 3 的弧長。

內容	時間分配	教學建議
89		(註：教師在選擇曲綫作示範用途時，宜留意與橢圓有關的例子，在可能範圍內應與學生作簡短的討論，藉以擴闊他們對數學其他支派的認識。教師可參考下列方法，並作簡單介紹： 對橢圓 $x = a\sin\theta$ ； $y = b\cos\theta$ ，恆有 $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta = a^2(1-e^2\sin^2\theta)$ ， 其中 $e = \frac{b}{a}$ 為離心率。由短軸一末端起計之弧長 s 是 $a\int_0^\phi\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}\,d\theta$ 。此積分不能以有限形式的初等函數表示，它是第二類的橢圓積分，並通常以 $E(e,\phi)$ 表示。為了完整起見，教師可引入第一類橢圓積分，即 $\int_0^\phi\frac{d\theta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}}$ ，它通常以 $F = (e,\phi)$ 表示。)
6.3 旋轉體的體積	4	在教授旋轉體的體積時，教師宜與學生討論旋轉體的形成及其意義，同時也應引入旋轉軸這名詞，好讓學生能認識及分辨由某個曲綫綫段或面積沿着某一旋轉軸旋轉而成的旋轉體，之後教師可教授下列兩個常用計算旋轉體的體積的方法： (1) 圓盤法

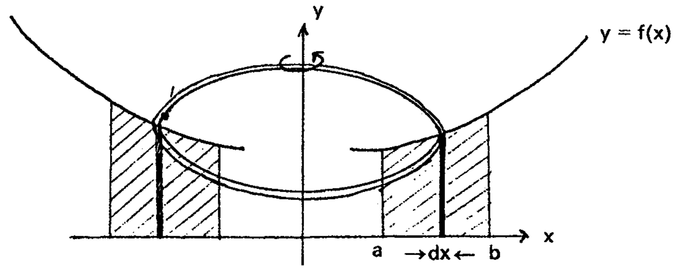


表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議

教師宜向學生強調圓盤元素體積 ΔV 或 dV 的公式爲 $dV = \pi y^2 dx$ ，它代表圓盤的體積。整個固體的體積爲 $\pi\int_a^b y^2 dx$ 。教師更可向學生介紹曲綫沿 y－軸旋轉所形成的體積是 $\pi\int_c^d x^2\,dy$ 。

(2) 外殼法



在這裏，元素體積是 $2\pi xydx$ 及整體體積爲 $2\pi\int_a^b xydx$ 。

有些情形，旋轉體的體積可能由曲綫沿着 x－軸或 y－軸以外的綫旋轉或將兩曲綫圍成的面積旋轉所形成，所以教師宜利用例子將各種可能情況加以闡明，並推導下列公式供學生參考。

$$\pi\int_a^b [[f(x)]^2 - [g(x)]^2]\,dx \quad 或 \quad \pi\int_c^d [[f(y)]^2 - [g(y)]^2]\,dy$$

教師宜提供足夠的例子作說明，下列例子可作參攷。

內容	時間分配	教學建議

(1) 證明由橢圓 $x = a\cos\theta$；$y = b\sin\theta$ 沿 x－軸旋轉所形成的體積是 $\frac{4}{3}\pi ab^2$ 。
(註：教師可要求學生從結果引申出半徑爲 r 的圓球體體積。)

(2) 求將曲綫 $y=x^3$、直綫 $x = 2$ 及 x－軸所圍成的面積沿直綫 $x = 2$ 旋轉所形成的體積。
(註：教師可用圓盤法和外殼法兩個方法解這問題。)

內容	時間分配	教學建議
6.4 旋轉體的表面面積	4	將曲綫 $y = f(x)$上由 $x = a$ 至 $x = b$ 的弧沿 x－軸旋轉所產生的表面面積是 $2\pi\int_a^b yds$

其中 ds 是弧長的元素，該面積公式通常以 $2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ 表達。若同樣的弧長沿 y－軸旋轉，表面面積爲 $2\pi\int_c^d xds$ 或 $2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy$ 其中 c 及 d 分別爲該弧末端的縱坐標。

若曲綫以極形式表式並以θ爲自變量，則面積爲 $2\pi\int_\alpha^\beta y\frac{ds}{d\theta}d\theta$ 其中 $y= r\sin\theta$及 $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}$ 。同樣地，若曲綫以參數形式 $x = x(t)$；$y = y(t)$表示，由 $t = t_0$ 至 $t = t_1$ 之曲綫部分長度沿 x 一軸旋轉所形成的表面面積是

$$2\pi\int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dx 。$$

教師可與學生討論下列例子：

(1) 證明拋物綫由原點至(4，4)的弧長沿 x－軸旋轉形成的表面面積爲 $\frac{8\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$ 。

(2) 證明心臟綫 $r = a(1+\cos\theta)$ 沿始綫旋轉所產生的表面面積爲 $\frac{32}{5}\pi a^2$ 。

表示刪去的內容

92

內容	時間分配	教學建議
		(3) 證明旋輪線 $x=a(1-\sin\theta)$ ； $y=a(1-\cos\theta)$ 沿 x－軸旋轉所形成的表面面積為 $\frac{64}{3}\pi a^2$ 。 (4) 證明星形線 $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 沿 x－軸旋轉所形成的表面面積為 $\frac{12}{5}\pi a^2$ 。
6.5 和的極限	4	這是一個應用定積分有趣的課題。教師宜利用一些簡單但明顯的例子如 $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\dots+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}$ 作為引入，並提供適當的提示，使學生能發現合適的定積分、積分區間與恰當的分割，而最重要是能選取正確的被積函數，來表示無限級數的極限。對此例而言，被積函數為 $f(x)=x$ ，區間為$[0,1]$ 而分割為 0，$\frac{1}{n}$ ，$\frac{2}{n}$ ，$\frac{3}{n}$ ，…，$\frac{n-1}{n}$ ，1。學生不難發現下列結果： $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\dots+\frac{n}{n^2})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$ $=\int_0^1 x\,dx$ $=\frac{1}{2}$ 教師可提供更多如下列之例子 (1) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n-1})=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ell n\ 2$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\dots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right)=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$

93

內容	時間分配	教學建議
		(3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}})$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}})$ $=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=2(\sqrt{2}-1)$ 務求使學生獲得更深入的了解及增進他們的運算技巧。下列是一個值得與學生討論的例子： 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ 。先將它轉換為 $\ell n\ y=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ell n(\frac{i}{n})$ ，其中 $y=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ $=\int_0^1\ell n\ x\,dx$ $=-1$ 故得 $y=e^{-1}$ (註：教師教授此部分時，可令學生參考單元 B5，使他們能與黎曼和作為和的極限聯系起來。) 教師必須提醒學生並不是所有和的極限都可用此法解答，調和級數，$\sum\frac{1}{n}$ ，是其中一個例子。
	~~20~~ 13	

表示刪去的內容