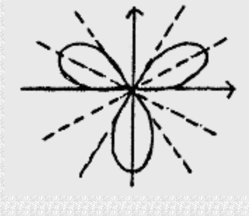
單元 **B7**：解析幾何

特定目標：

1. 學習除直角坐標外的另一種坐標系：極坐標。
2. 學習二次曲線。
3. 利用代數方法，學習解決軌跡問題。
4. 解決有關問題。

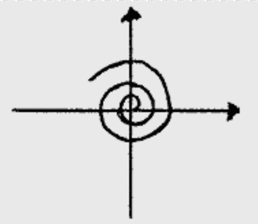
內容	時間分配	教學建議
7.1 基本解析幾何知識	5	學生除了對中學數學解析幾何內容有所認識外，學習此單元的其他課題應先掌握下列知識： (1) 外分點； (2) 直線圖形的面積 $\frac{1}{2}\times\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$； (3) 求兩直線的交角時所用公式 $\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$； (4) 直線的法線式； (5) 兩直線之間的角平分線； (6) 直線族及 (7) 圓族。 學生應懂得極坐標系及直角坐標系之間的轉換，並應掌握曲線方程在兩個坐標系之間的轉換方法。 由極坐標轉爲直角坐標：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

94

內容	時間分配	教學建議
		由直角坐標轉爲極坐標：$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\frac{y}{x} \end{cases}$，其中 $x \neq 0$，並且 θ 是由 (x, y) 所在的象限決定。
7.2 於極坐標系的曲綫描繪	4	學生應懂得極坐標曲線方程的繪圖，因爲在「積分的應用」一課中需要對這種繪圖法有基礎認識，以下是一些學生應懂得繪畫的簡易極形式曲線方程： (1) 直線： $\theta = k$，其中 k 爲一正常數； $r\cos\theta = a$ (垂直於 x – 軸的直線) (2) 圓： $r = k$，其中 k 爲一正常數； $r = \sin\theta$ (3) 拋物線： $r = (1 + \cos\theta) = k$，其中 k 爲一常數 (4) 心臟線： $r = a(1 - \cos\theta)$，其中 a 爲一常數 (5) 玫瑰曲線： $r = a\sin 3\theta$ 

95

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		(6) 螺線： $r = \theta$ 
7.3 於直角坐標系的圓錐曲綫	7	學生應可以分別各圓錐曲線的標準方程，包括： $y^2 = 4ax$ (拋物線) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (橢圓) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (雙曲線) $xy = c^2$ (等軸雙曲線) 其參數表達形式亦應加以學習，包括： $y = r\sin\theta$； $x = r\cos\theta$ (橢圓) $y = b\sin\theta$； $x = a\cos\theta$ (橢圓) $y = b\tan\theta$； $x = a\sec\theta$ (雙曲線) $y = \frac{c}{t}$ ； $x = ct$ (等軸雙曲線) $y = 2at$； $x = at^2$ (拋物線) 對雙曲線的漸近線亦需要有所認識，而對圓錐曲線的其他性質例如離心率、焦點及準線等亦可教授但不需特別強調。

內容	時間分配	教學建議
7.4 圓錐曲綫的切綫及法綫	6	學生應懂得運用不同方法去找出圓的切線。經過簡單圓形 $x^2 + y^2 = a^2$ 上一點 $(x_1，y_1)$ 的切線方程爲 $x_1x + y_1y = a^2$，其法線方程則爲 $x_1y - y_1x = 0$。這些基本結果的導數亦可在此介紹以啓發學生思考及計算如以下的例子以強調其基礎方法： 計算經過圓形 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 上一點$(x_1，y_1)$ 的切線方程， (i) 可利用切線與圓形半徑的垂直關係； (ii) 設切線方程爲 $y = mx+k$，利用聯立方程 $\begin{cases} y = mx + k \\ x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \end{cases}$ 有等根的關係。 並應注意到方法(ii)是可以應用於一點 $(x_1，y_1)$ 不在圓形的情況上。在此可以得到經過圓形 $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 上一點 $(x_1，y_1)$ 的切線方程爲 $x_1x + y_1y + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$。若將其結果普及，應可得到下列結果： (a) 經過拋物線 $y^2 = 4ax$ 上一點(x_1, y_1)的切線方程爲 $y_1y = 2a(x + x_1)$ (b) 經過橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一點(x_1, y_1)的切線方程爲 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ (c) 經過雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ 上一點(x_1, y_1)的切線方程爲 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ (d) 經過等軸雙曲線 $xy = c^2$ 上一點(x_1, y_1)的切線方程爲 $y_1x + x_1y = 2c^2$ 在找到切線方程後，學生應對法線方程問題上不會有任何困難的。 當二次曲線方程是以參數式表達時，其有關的結果亦應考慮。教師應引導學生找出下列結果： (a) 拋物線 $\begin{cases} x = at^2 \\ y = 2at \end{cases}$ 的切線方程爲 $y = \frac{x}{t} + at$ (b) 橢圓 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 的切線方程爲 $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ (c) 雙曲線 $\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\tan\theta \end{cases}$ 的切線方程爲 $\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1$

表示刪去的內容

內容	時間分配	教學建議
		(d) 等軸雙曲線 $\begin{cases} x = ct \\ y = \dfrac{c}{t} \end{cases}$ 的切線方程爲 $x + t^2 y = 2ct$ 。 爲了使到學生能理解基本概念，並能掌握和運用所學技巧，切點弦的基本概念亦應予以討論。
7.5 於直角坐標系的軌跡問題	5	學生應對一組能夠符合一系列的限制條件而又能利用直角坐標方程來表達的點的軌跡方程加以學習，例如： (1) 當一點與一固定點的距離不變，其移動的軌跡爲一圓形。 (2) 當一點與一固定點及一固定直線之間的距離相等，其移動的軌跡爲一拋物線。 (3) 當圓形在一直線上滾動時，圓周上一點的軌跡爲旋輪線。
7.6 平面曲綫的切綫及法綫	4	當學習了微分學後，學生應可應用微分法去計算平面曲線在直角坐標系上的切線和法線方程。利用微分公式及鏈式法則，學生應可找出以隱函數式或參數式定義的曲線的切線和法線方程。教師應當在這課題上作出適當安排，因應學生的能力，將這個單元作爲微分學的深入應用前的引例，或作爲基本微分學應用的延續。
	~~31~~ 27	

表示刪去的內容