



示例 6:

## 多面體的製作及性質

目標：(1) 認識及製作正多面體（或稱柏拉圖圖形）  
(2) 找出多面體的一些性質如歐拉公式和對偶性

學習階段：3

學習單位：幾何簡介

所需材料：(1) 塑膠正多面體教材套或膠飲管和大頭針  
(2) 全套 5 個柏拉圖立體和其他多面體，如亞基米德立體及錐體等

預備知識：製作立體模型的經驗及正多邊形的認識

活動內容：

### 活動一：收集多面體

1. 教師要求學生收集在大廈（如新式高樓大廈）、美術作品（如金字塔）及自然界（如水晶等）中不同的多面體例子。
2. 學生在班上展示他們收集的圖畫及相片，教師從中引導學生討論正多面體的意義及判定那些圖形為正多面體。

### 活動二：製作正多面體

3. 將學生以三或四人分組。教師分發給每組學生兩包各包只有一種正多邊形的咭紙。學生須要嘗試分別從每包正多邊形的咭紙製作出一個正多面體。
4. 教師邀請不同組別的學生展示他們所製作的正多面體，教師在此引入各正多面體的名字。

5. 教師與學生討論那些正多邊形可製成正多面體，在數算正多面體的總數時，教師可與學生歸納出只有五個正多面體，並引入「柏拉圖立體」的名字。

*活動三：多面體的性質*

6. 教師以活動一所收集的多面體及活動二所製作的正多面體，向學生介紹有關名詞：多面體的面、邊和頂點。
7. 在各多面體上，學生須要點數它們的面、邊和頂點的數目，然後完成工作表內的表格並找出各數字的規律。

名稱	面的數目 F	頂點的數目 V	邊的數目 E
活動一所收集的多面體			
活動二所製作的正多面體			
正四面體			
正立方體 (正六面體)			
正八面體			
正十二面體			
正二十面體			

8. 教師要求學生向同學介紹他們所發現的規律，包括：
- (a) 歐拉公式(或稱尤拉公式)： $F + V - E = 2$
  - (b) 立方體和正八面體的對偶關係
  - (c) 正十二面體及正二十面體的對偶關係
- 教師引導學生觀察以上規律或幫助能力較弱的學生作出歸納。
9. 教師進一步解釋對偶多面體的其他性質：例如，八面體可放入立方體內，前者的頂點會碰到後者的面中心點。

### 工作紙：多面體的性質

1. 在所收集或製作的多面體中，點算面、頂點及邊的數目並填寫下表：

名稱	面的數目 <b>F</b>	頂點的數目 <b>V</b>	邊的數目 <b>E</b>
活動一所收集的多面體			
活動二所製作的正多面體			
正四面體			
正立方體 (六面體)			
正八面體			
正十二面體			
正二十面體			

2. 觀察邊、頂點及面數目的規律，與同學討論所得結果。

---



---



---



---



---

教師注意事項：

1. 正多面體有以下特點：

- (a) 這些物體從任何隅角、邊或任何面的中心觀看都一樣；
- (b) 它們的各個面都是全等正多邊形；
- (c) 它們的各條邊、各塊面或各個隅角都是相等或全等的。

只有 5 種正多面體（或稱為柏拉圖立體）：正四面體、正立方體、正八面體、正十二面體和正二十面體。（看圖 1）

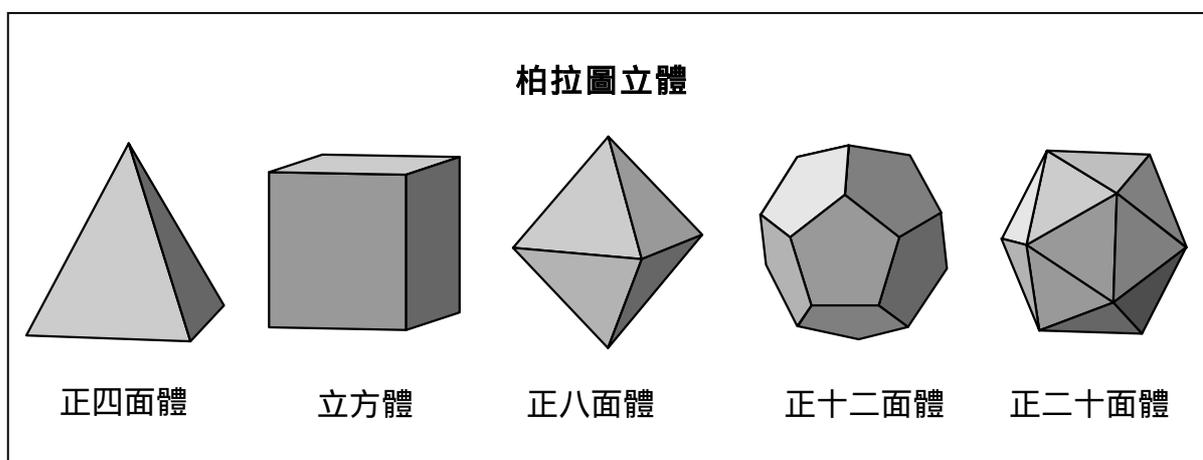


圖 1

- 2. 這活動的目的是提供學生多些接觸多面體的經驗，以培養他們的空間想像能力。教師須給予學生足夠時間把玩立體，因此，由這活動所得出的結論，相對而言並不是這活動的主要重點。
- 3. 部分學生在小學已有製作立體的經驗，但是在課堂上讓學生製作多面體仍是十分有趣的活動。教師或許在課堂內示範製作一個正四面體，而讓學生以製作其他正多面體為家課。教師可利用附錄甲多面體的摺紙模樣或塑膠多面體教材套，甚至以顏色紙覆蓋飲管和大頭針形成的框架。至於周圍環境多面體的相片亦可在教育署 2000 年製作的“空間探究”內的空間探究圖片集光碟內找到。
- 4. 為了減少學生因不能製成正多面體而產生的負面情緒，建議教師分發給每一組正多邊形時，應包含一包等邊三角形。除此，學生極有可能不會製成正 12 面體及正 20

- 面體，教師可預先製作以上立體，以便學生沒有製成以上立體時，可以展示有關立體。各正多邊形的圖樣可在附錄乙中取得。
5. 在討論柏拉圖立體時，教師可以七邊形或八邊形來製作正多面體，讓學生得出為何它們不能製成正多面體的直觀印象。教師亦可使用“Key Curriculum Press”編製的「柏拉圖活動教材套」內的錄映帶來展示為何只有 5 種柏拉圖立體。
  6. 當學生已對多邊形內角值有認識後，教師可於「與線及直線圖形有關的角」的學習單位內與學生討論為何只有 5 個柏拉圖立體的理據。理由如下：
    - (a) 只有等邊三角形、正方形和正五邊形可用來製成柏拉圖立體。
    - (b) 如果用的是等邊三角形，在多面體的每一個頂點只可以把 3 個、4 個或 5 個三角形連起來，分別做成四面體、八面體和二十面體。
    - (c) 如果用的是正方形，在多面體的每一個頂點只可以把 3 個正方形連起來，組成正立方體。
    - (d) 如果用的是正五邊形，在多面體的每一個頂點只可以把 3 個正五邊形連起來，組成十二面體。
 由此，學生應可得出「只有 5 種柏拉圖立體」的結論。
  7. 教師可要求能力較高的學生研習歐幾里得『幾何原本』內有關討論柏拉圖立體的編章。
  8. 至於多面體的性質，教師可與學生進一步討論找出頂點和邊的數目的捷徑。  
(例如，十二面體： $E = \text{面數} \times \text{每面的邊數} \div 2$ ； $V = \text{面數} \times \text{每面的頂點數目} \div 3$ )
  9. 有關對偶關係的討論，部分學生不一定能發現成對而邊數相同的多面體，而它們的面數和頂點數目便成互調。因此，教師可給予提示並引入對偶多面體的名稱。教師亦可將有關規律的解釋作為學生專題習作活動，並鼓勵學生在同學面前解釋他們的論點，以培養溝通能力及表達視覺影像能力。除此，教師亦可利用圖片來展示正八

面體的邊與立方體的面中心點相連的情況（見圖 2 及圖 3）。

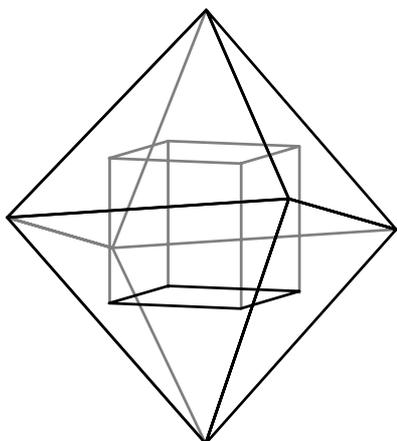


圖 2

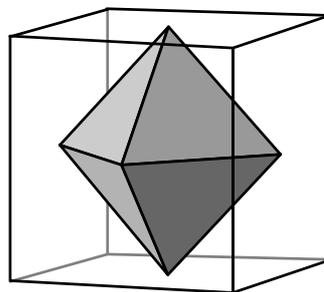


圖 3

參考資料：

書籍：

1. 藍紀正、朱恩寬譯。(1992)。《歐幾里得 幾何原本》。台灣：九章出版社翻譯。(該書提供正多面體數目的論證。)
2. 黃毅英。(1997)。《邁向大眾數學的數學教育》。台灣：九章出版社 (該書提供處理立體的更多說明。)
3. Glidden, P. & Fry, E. (1993). Two proofs that only five regular polyhedra exist. In *Mathematics Teacher*, pp. 657-61.
4. Hopley, R.B. (1994). Nested Platonic Solids: A class project in solid geometry. In *Mathematics Teacher*, pp. 312-8.
5. Pedersen, J. & Hilton, P. (1988). *Build Your Own Polyhedra*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley Innovative Learning Publications.
6. Pugh, A. (1990). *Polyhedra: A visual Approach*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publication.
7. Seymour, Dale. (1994). *Polyhedra Blocks*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publication.
8. Seymour, Dale. (1995). *Advanced Polyhedra Blocks*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publication.
9. M. Senechal & G. Fleck ed. (1988). *Shaping Space —A Polyhedral Approach*

---

USA: Birkhauser Boston. (該書提供各種多面體的圖示，以及討論它們在科學和日常生活的應用。)

**網址：**

1. Building Polyhedra Project
  - <http://www.frontiernet.net/~decoates/poly.htm>
2. Platonic solids
  - <http://www.teleport.com/~tpgettys/platonic.shtml>
  - <http://www.construct.net/projects/euclid/index.html>
  - <http://www-personal.umich.edu/~horsey/match/proof.html>
  - <http://www.mhri.edu.au/~pdb/geometry/platonic/>
3. Compounds of Regular Solids
  - <http://www.teleport.com/~tpgettys/stellate.html>.

**教具：**

“Key Curriculum Press”編製的「柏拉圖活動教材套」，包括錄映帶，及預先裁好的多邊形卡紙，教師可用這些卡紙用橡皮圈連成各種多面體。