

五項高層次思維能力

緒言

電腦和計算機等先進科技，已大大改變了數學教育的模式。除了須學習那些範疇的數學知識外，數學的學習過程，以及學生對學習數學所抱持的態度也非常重要。因此，數學的學習內容，思考過程和學習態度，對在各個學習階段學習數學的學生來說，都是重要的基本元素。

如何教導學生高層次思維能力，現正是教育界的焦點所在。特別值得一提的是，經修訂的中學數學科課程已把重點轉移至培養學生的高層次思維能力。總的來說，高層次思維能力所衡量的，不僅是純粹擷取資料，而需要各方面的智力。因此，廣義來說，高層次思維能力可視作進行這些工作所需的各種能力。《課程綱要》已確認了五項基本的高層次思維能力，分別是解決問題能力、探究能力、推理能力、傳意能力和構思能力。在數學學習中，這些基本和互有關連的學習方法，以及思考和運用數學知識的方式都很重要。事實上，很多學生在學習數學時遇到困難，往往因未能妥善掌握當中一項或多項能力所致。我們應為學生提供更多訓練，讓他們好好掌握這些能力，並能善加運用以建構數學知識，從而能夠終身學習。

然而，教師應注意下列四點事項。首先，高層次思維能力並沒有簡單明確，廣受接納的一套定義。事實上，我們可把高層次思維能力歸納為多個互相重疊的類別，例如超認知能力、批判性思考和創意思維等。儘管如此，人們普遍認為高層次思維是不能演算和非常複雜的，因為它是思維過程中的一種自我規管，並可能時常出現多個解決方案。這些是高層次思維能力所為人認同的特點，因而使教師常用一種技巧，就是在數學課中提出開放式的問題，以培育學生的高層次思維能力，並讓學生有機會思考數學問題，以及與其他同學和教師討論。

第二，這五項高層次思維能力在數學學習中是不能輕易分割的。舉例來說，學生運用推理能力解決數學問題，亦可視作運用解決問題能力。同樣地，學生做數學課業時會經常涉及傳意能力的運用，而所有探究工作亦須運用構思能力。因此，本教學資源套所載的示例，只旨在說明教師可透過有關示例，培養學生主要的高層次思維能力。

第三，高層次思維能力可脫離指定的內容獨立教授，但把它們納入課程的內容範疇，似乎是教授這些能力的常用做法。把高層次思維能力納入課程的內容範疇，主要是讓學生把注意力集中在某一個環境所學習的能力，並能明白到它能否轉化為另一個環境的應用。

第四，電腦為教師教授高層次思維能力提供了良好的工具，因為它具有互動的功能，並能提出和引發問題讓學生思考。電腦是有效的媒介，有助教師初期教導學生掌握這些技巧，以及幫助學生作出歸納。使用電腦可讓學生把更多時間用在真正需要思考的課業上，而不是用在次要和瑣碎的活動，並使學生更能善用時間，間接加強了他們的思維能力。

解決問題能力

解決問題是數學學習不可或缺的一個部分，當中包括找出在學習過程中所遇到的障礙、限制或未能預見的規律，試行不同的方法解決問題，以及評鑑所得出的答案是否正確，或論證答案是否合理。National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)¹認為，解決問題就是能夠在全新和不熟悉（或未能預見）的情況下，懂得如何運用以前所學的知識。在解決問題的過程中，學生會運用已有的知識，並發展新的數學知識。他們亦應透過解決問題的過程，學會思考的方法，並能在不熟悉的情況下建立自信及養成堅持的習慣。

解決問題一般運用的策略，包括了解問題、構思解決問題的計劃、執行該項計劃、審視結果是否合理和作出評鑑²。不少課本已把這四個階段的工作視為解決問題的綱領。

如要解決問題，必須把以前所學的數學知識和經驗互相結合，藉以謀求辦法，以解決尚未知悉應採用何種程序處理的問題。思考過程亦可能會涉及直覺。因此，學生在解決問題的過程中，可能須作出推測，並試行不同的辦法來解決問題。教師應注意，任何可妥善解決問題的方法，都是「正確」的方法。教師不應因學生所採用的方法耗時太久或過於複雜而遏止學生採用該種方法。反之，教師應耐心地引導學生檢視解決問題的過程或所採用的方法。

1 NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

2 Polya, G. (1957). *How to Solve It*. New York: Doubleday & Co., Inc.

高層次

思維能力

非常規和開放式的問題，都能讓學生有更多機會表現解決問題的能力。然而，教師應留意，若重複使用類似的問題，會使那些問題逐漸變成常規化，因而失去培育學生高層次思維能力的的作用；即使那些問題原本是非常規或沒有既定答案的問題，結果都會是這樣。

教師應注意，解決問題時的思維狀態較諸解答個別問題更為重要。後者只須寫下有相關的數算規則(或公式)講解如何運用該規則，以及為學生提供習作以熟練該規則。然而，前者則強調實用性的思考，以及培育在運用數學意念和技巧以應付不熟悉的問題方面的彈性和創意。學生可透過解決問題的過程，培養對數學的興趣和獨立思考的能力。

探究能力

探究是透過發問或測試一項假設，以發掘或建構知識。觀察、分析、撮要和核證，都是進行探究活動的主要元素。探究活動主要是一種自學程序，但有時也需要教師的適當指導，這須視乎學生的能力和活動的複雜程度而定。向學生提問是教師常用的一種方法，以指導學生探究知識。事實上，經細意設計的問題對激勵學生發掘事物的相似和不同之處、規律和趨勢都很有用。教師亦可要求學生就一些數學猜想進行測試，讓他們在學習過程中扮演更積極的角色。

教師所設計的探究活動應能切合學生的能力，以便學生在得出數學問題的結果時，能享受箇中的樂趣。此外，把學生分成小組學習(如可能的話)，效果可能會更佳，因為學生可較容易提出意見。以下的用語對指導學生進行探究活動時或有幫助：發掘、發現、構想、證明、核證、建構、預計、試驗、探究等。

探究活動通常需要使用若干教具。因此，教師應在上課前妥為準備，以確保有足夠的教具可供使用。教師在課堂中進行探究活動前，應考慮下列問題：

- 進行探究活動時會否把學生分組？若會的話，應分為多少組？
- 如何能確保所提供的指導(給予提示或提問)分量恰到好處？(教師應留意，給予太少或太多的指導對學生都沒有益處。)
- 如有電腦可供使用的話，應使用哪種軟件？有沒有足夠數量的軟件供全班學生使用？如沒有的話，可採取什麼措施？

傳意能力

傳意涉及接收訊息和分享意念，並能以數字、符號、圖形、圖像、圖表、模型和模擬等方式表達。傳意有助闡釋概念和掌握意念，因此是數學教學中不可缺少的一環。在透過傳意的過程，學生學會清楚且具說服力地表達數學意念，此舉肯定有助培育他們的邏輯思維。

由於數學經常以符號表達，故教師往往忽略了以口頭和書面方式表達數學意念。然而，在描述、闡釋和論證一些數學意念時，是需要運用口語和文字的。這些能力有助學生理清思路，並能更清楚了解一些數學概念和程序。此外，在傳意的過程中，學生更可建構、改進和鞏固數學知識。

在各種傳意模式中，以書面傳意至為重要，因為書面傳意可記錄學生的思想和意念。此外，在學習數學時以書面傳意，可促使學生積極參與。然而，有一點須注意的是，學生在書寫時必須簡潔、扼要和整齊，因為數學需要用清楚、連貫、簡潔和令人信服的語言來表達。

我們可採用多種方法促進學生的傳意能力。舉例來說，我們可要求學生描述一項課業，並說出該項課業有何特點。探究活動和專題習作是培養學生傳意技巧的最佳練習。開放式問題讓學生有機會建構他們的答案，並能鼓勵多元或創意思維，締造傳意的理想空間。小組討論和辯論亦十分有效，這些方法可鼓勵學生多讀、多寫和多討論數學意念。然而，教師須注意課室的安排和學生的分組情況是否恰當，以方便學生分享意見。以小組協作形式討論，讓學生有機會探究新意念，而全班學生進行討論，則可比較和對照個別學生所提出的不同意見。

推理能力

推理是從證據、理由或假設中得出結論，並須提出符合邏輯的論據，以推斷或推測結論。推理可分為歸納性推理和演繹性推理。歸納性推理是從具體的觀察，概括出廣義的通則和理論，而演繹性推理則剛好相反，是從一般原理推出關於具體情況下的結論。以性質而言，歸納性推理較為開放，且具探究性，而演繹性推理的本質則較為狹窄，並通常與測試或驗證假設和理論等有關。因此，如要找出 1、3、5、7、9..... 這個序列的關係屬歸納性推理，而應用幾何定理來進行幾何驗證（例如兩個近似三角形的對應角是相等的），則屬演繹性推理。

高層次

思維能力

由於推理是數學的基本元素，故學生必須懂得推理，才能了解數學概念。經過查究和推測、建立和評鑑數學論據，以及驗證結果等，學生能了解和體會推理的功用和提出證明，因而能從理論和假設中得出結論，引申出符合邏輯的推論。一如其他高層次思維能力，推理能力是不能在短短的一個教節內學會。推理是一種思維習性，學生在處理數學問題時應不時運用推理能力，並透過長期在不同情境中學習數學而培養或建立這種能力。

為了培養學生的推理能力，教師應教導學生下列技巧：

1. 整理資料並加以分類、闡釋資料，以及利用圖畫、圖表、圖像、模型、符號和列表介紹分析結果。
2. 描述、歸納和驗證以各種形式和在不同情境下所出現的規律，作出推測，靈活思考，論證和反辯，了解符合邏輯和不符合邏輯的論據，領悟連串的推理，作出推論，以及運用數學驗證方法（包括以矛盾法、反例和歸納等方法驗證）。

應注意的是，推理牽涉非正規的思考，提出假設和核證這些假設。教師應鼓勵學生證明他們所找出的答案和找尋答案的過程都是合理的。一些有助學生培養推理能力的問題如下：

- 為什麼你認為這是正確 / 錯誤的？
- 如果跟這個方向前進，會有什麼後果？你怎樣知道？
- 如果把 A 角改為 90 度，會不會得出同樣的結果？
- 如果這些線不是平行的，則該項定理便不成立。為什麼？
- 畢氏定理適用於任何三角形。你對這項陳述有什麼意見？

構思能力

構思透過領悟和思考特定的經驗，把知識組織和重組起來，以便從該項特定的經驗中取得一些規律和意念，並加以歸納。我們在形成概念時，必須把所得的經驗分類，然後抽取所需的資料。

學習數學的難處在於它的抽象性和概括性。我們不能利用一套定義，把抽象的概念

傳授給學生，而只能讓他們透過一些合適的例子來領悟這些概念。因此，在教授抽象概念時，應輔以足夠的數學和日常例子加以說明。教師須為學生提供清晰的指引，以便他們可從有關的例子建立數學的概念，並能運用這些概念，解決在不熟悉情境中所遇到的問題。

當教師向學生介紹一個新的概念時（例如「所有對稱三角形都是相似的。」），可提供例子或反例加以說明，亦可要求學生探索與該項概念有關的資料（例如有關相似三角形或對稱三角形的資料），並把例子中相似和不同的地方分類。

簡單來說，為協助學生建立數學概念，教師有需要提供能讓學生自行建立新概念的適當例子或活動。