



示例

三角恆等式

目標： 探究三角恆等式

$$(1) \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$(2) \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$(3) \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$(4) \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$(5) \quad \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$$

學習範疇： 度量、圖形與空間

學習單位： 三角比和三角的應用

學習階段： 第三學習階段

所需教材： *Excel* 及檔案 09_ex_c.xls

預備知識： 銳角三角比的定義

活動內容：

1. 課堂開始時，教師與學生複習銳角三角比 sine, cosine 和 tangent 的定義。
2. 教師將學生分組，並派發工作紙 9.1 及存有 *Excel* 檔案 09_ex_c.xls 的磁碟給學生。
3. 學生開啟 *Excel* 檔案 09_ex_c.xls 內的工作表“Identities_1”，並完成工作紙 9.1 第 I 部分。見圖 9.1。工作表“Identities_1”的目的是讓學生探究三角恆等式 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 和 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 。
4. 教師要求部分組代表匯報他們的猜想及證明。教師可在適當時候給予評語。

Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
	θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\sin \theta \div \cos \theta$	$\sin^2 \theta$	$\cos^2 \theta$	$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$
2	0	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	1.00
3	1	0.0175	0.9998	0.0175	0.0175	0.0003	0.9997	1.00

圖 9.1

5. 學生利用同一檔案內的工作表“Identities_2”，如圖 9.2 所示，探究其它三角恆等式。學生完成工作紙 9.1 第 II 部分。工作表“Identities_2”的目的是讓學生探究三角恆等式

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \text{ 及 } \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$90^\circ - \theta$	$\sin(90^\circ - \theta)$	$\cos(90^\circ - \theta)$	$\tan(90^\circ - \theta)$	$1/\tan \theta$
2	0	0.0000	1.0000	0.0000	90	1.0000	0.0000	#####	#DIV/0!
3	1	0.0175	0.9998	0.0175	89	0.9998	0.0175	57.2900	57.28996

圖 9.2

6. 教師要求一些組代表匯報他們的猜想及證明。教師於適當時間給予評語。

工作紙 9.1：探究三角恆等式

第 I 部分：探究 $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ 及 $\tan \theta$ 之間的關係

1. 開啟 *Excel* 檔案 09_ex_c.xls 並選擇工作表“Identities_1”。
2. 在儲存格 A4 至 A92 中，鍵入 θ 由 2° 至 90° 的值。
3. 計算對應的 $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ ， $\tan \theta$ ， $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ， $\sin^2 \theta$ ， $\cos^2 \theta$ 和 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ 的值。
4. 根據第 3 點求得的數值，回答以下問題：
 - (a) 當 θ 由 0° 增加至 90° 時， $\sin \theta$ 的值會由__增加/減少*至__。
 - (b) 當 θ 由 0° 增加至 90° 時， $\cos \theta$ 的值會由__增加/減少*至__。
 - (c) 當 θ 由 0° 增加至 90° 時， $\tan \theta$ 的值會由__增加/減少*至__。

*刪去不適用的字。

5. 試寫下你的猜想。
 - (a) $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ 和 $\tan \theta$ 之間有什麼關係？

- (b) 對 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ 的值有何發現？

6. 以不同的非整數值鍵入 θ ，例如 32.5° 、 65.8° 、 89.9° 等。

重複計算第 3 點中各項的值。

你認為第 5 點的猜想是否仍然成立？

Excel

7. 證明猜想：

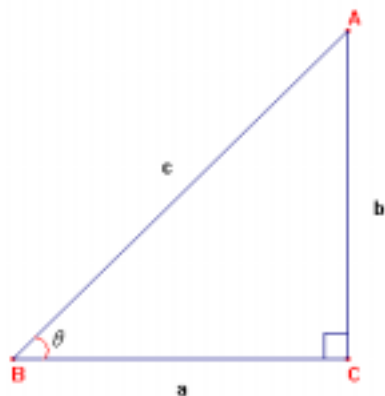
(a) 以 a , b 和 c 表示三角比。

圖 9.1 a

(i) $\sin \theta =$ _____
(ii) $\cos \theta =$ _____
(iii) $\tan \theta =$ _____

..... (*)

(b) (i) 利用(a)(i)及(a)(ii)的結果，以 a , b 和 c 表示 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 。

(ii) 將(b)(i)的結果與(a)(iii)作比較，有何發現？寫下你的結論。

(c) 利用(a)(i)及(a)(ii)的結果，證明 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ 之值為 1。

第 II 部分：探究 $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ ， $\tan \theta$ ， $\sin(90^\circ - \theta)$ ， $\cos(90^\circ - \theta)$ 及 $\tan(90^\circ - \theta)$ 之間的關係

1. 開啟 *Excel* 檔案 09_ex_c.xls，選取工作表“Identities_2”。

2. 在儲存格 A4 至 A92 中，鍵入 θ 由 2° 至 90° 的值。

3. 計算對應的 $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ ， $\tan \theta$ ， $90^\circ - \theta$ ， $\sin(90^\circ - \theta)$ ，

$\cos(90^\circ - \theta)$ ， $\tan(90^\circ - \theta)$ 和 $\frac{1}{\tan \theta}$ 的值。

4. 寫下你從這些答案中發現的所有關係。

5. 以不同的非整數值鍵入 θ ，重複計算第 3 點中各項的值，並檢查於第 4 點中找出的關係是否仍然成立。

Excel

6. 證明猜想：

- (a) 以 θ 表示角 A 及以 a, b 和 c 表示 $\sin A, \cos A, \tan A, \sin(90^\circ - \theta), \cos(90^\circ - \theta)$ 和 $\tan(90^\circ - \theta)$ 。

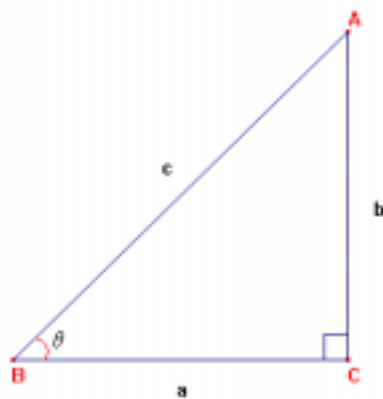


圖 9.1b

$$A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan A = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \underline{\hspace{2cm}} \dots\dots\dots (**)$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

- (b) 將結果(**) 與第 I 部分中第 7 點的結果(*) 作比較，你能得出什麼結論？

教師注意事項：

1. 進行課堂活動前，教師須預先準備妥 *Excel* 檔案供學生使用。
2. 在 *Excel* 中，內置三角函數均以弧度計算，所以必須將鍵入的角由度轉換為弧度以便使用 *Excel* 之內置計算功能。
3. 教師應讓學生留意，如果知道其中一個三角比，可以利用三角恆等式 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 及 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 去計算其餘兩個三角比。教師應給予學生補充練習去鞏固概念。
4. 在圖 9.1b， A 和 B 是餘角，教師須向學生引入此名詞。
5. 對能力較高的學生，教師可刪去圖表 9.2 中的欄“ $\frac{1}{\tan\theta}$ ”。
6. 在 *Excel* 中，若 $\theta = 90^\circ$ ，學生計算 $\tan\theta$ 之值時，便會得到記號“#####”，同樣地若 $\theta = 0^\circ$ ，計算 $\tan(90^\circ - \theta)$ 時，亦得到相同結果。教師必須向學生釐清它的意義。在這個軟件中，此記號代表一個無限數值。在數學語言來說， $\tan 90^\circ$ 是無定義的。
7. 教師可利用其它的軟件例如 *Graphmatica* 讓學生從視覺方面明白三角恆等式。例如：進行以圖像方法去探究恆等式 $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$ 的活動時，教師可利用軟件 *Graphmatica* 繪畫 $y = \sin x$ 及 $y = \cos(90^\circ - x)$ ， $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ 的圖像。學生會發現兩幅圖像互相重疊。
8. 工作紙 9.1 的建議答案。

第 I 部分

- 第 4 題
- (a) 當 θ 由 0° 增加至 90° 時， $\sin\theta$ 的值會由 0 增加至 1。
 - (b) 當 θ 由 0° 增加至 90° 時， $\cos\theta$ 的值會由 1 減少至 0。
 - (c) 當 θ 由 0° 增加至 90° 時， $\tan\theta$ 的值會由 0 增加至無限大。

- 第 5 題
- (a) 關係是 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 。
 - (b) 關係是 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 。

Excel

第 7 題 (a) (i) $\sin \theta = \frac{b}{c}$, (ii) $\cos \theta = \frac{a}{c}$, (iii) $\tan \theta = \frac{b}{a}$ 。

(b) (i) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{a}$, (ii) $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ 。

第 II 部分

第 4 題 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$, $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$ 。

第 6 題 (a) $A = 90^\circ - \theta$ 。

$$\sin A = \frac{a}{c} , \cos A = \frac{b}{c} \text{ 及 } \tan A = \frac{a}{b} 。$$

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{a}{c} , \cos(90^\circ - \theta) = \frac{b}{c} \text{ 及 } \tan(90^\circ - \theta) = \frac{a}{b} 。$$

(b) $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$, $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$,

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta} 。$$

操作程序：

(I) 由文字檔案複製符號 θ 至儲存格 A1：

1. 開啟一個新文字檔案。
2. 從菜單工具列，選擇插入，再選符號。
3. 在字型欄位中選擇標準文字，在種類欄位中選擇基本希臘文。
4. 點選 θ ，按插入，再按關閉。
5. 複製符號 θ 。
6. 開啟一個新 *Excel* 檔案，點按儲存格 A1，然後貼上符號 θ 。
7. (只在英文視窗 NT4.0) 變換字型為 Arial 才可顯示符號 θ 。

(II) 在儲存格 F1 鍵入 $\sin^2 \theta$ 項：

1. 選擇儲存格 F1，然後鍵入 $\sin 2\theta$ 。
2. 從 $\sin 2\theta$ ，選取數字‘2’，然後在菜單工具列，選擇格式。
3. 選擇儲存格，在特殊效果中，選取上標。
4. 按確定。

(III) 在儲存格 A2 至 A92，鍵入 θ 由 0° 至 90° 的值：

1. 在儲存格 A2，鍵入‘0’以設定 θ 的起始值為 0。
2. 在儲存格 A3，鍵入公式‘=A2+1’以計算 $\theta + 1$ 的值。
3. 選擇儲存格 A3，將浮標移至儲存格的右下角，拖曳儲存格 A3 的填滿控點至 A92 以複製 A3 中的公式到儲存格 A4 至 A92。

(IV) 工作紙中的計算：

1. 計算 $\sin \theta$ 的值：
 - (a) 以 $\sin \theta$ 標示儲存格 B1。
 - (b) 選擇儲存格 B2。在儲存格 B2 內，鍵入公式‘=sin(A2*PI()/180)’以計算 $\sin \theta$ 的值。
 - (c) 以類似的方法在儲存格 C2 與 D2 內，鍵入 $\cos \theta$ 與 $\tan \theta$ 的公式。

Excel

2. 計算 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 與 $\sin^2 \theta$ 的值：
- 以 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 標示儲存格 E1。
 - 選擇儲存格 E2。在儲存格 E2 內，鍵入公式‘=B2/C2’以計算 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 的值，然後按 **Enter**。
 - 以 $\sin^2 \theta$ 標示儲存格 F1。
 - 選擇儲存格 F2。在儲存格 F2 內，鍵入公式‘=B2^2’以計算 $\sin^2 \theta$ 的值，然後按 **Enter**。
 - 以類似的方法鍵入 $\cos^2 \theta$ ， $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ ， $90^\circ - \theta$ ， $\sin(90^\circ - \theta)$ ， $\cos(90^\circ - \theta)$ ， $\tan(90^\circ - \theta)$ 及 $\frac{1}{\tan \theta}$ 。

(V) 利用 *Graphmatica* 以圖像探究三角恆等式：

- Graphmatica* 試用版可於下列網址下載：
<http://www8.pair.com/ksoft/>
- 選擇 **View | Grid Range**。
- 在 **Grid Range** 的對話方塊中鍵入下列資料：

Left	: 0	Right	: 90
Bottom	: -1.5	Top	: 1.5

 然後按 **OK**。
- 選取 **Labels | Legends**。
- 在 **Axis Legends** 的對話方塊中，點按 **Custom Spacing**，並於 x 軸的方格中，鍵入 10，然後按 **OK**。
- 若要繪畫圖像 $y = \sin x$ ，鍵入方程 $y = \sin(x \text{ d})$ ，
然後按 **Enter**。
若要圖像 $y = \cos(90^\circ - x)$ ，鍵入方程 $y = \cos((90^\circ - x) \text{ d})$ ，然後按 **Enter**。
- 選擇 **View | Colors** 可改變曲線與背景的颜色。

一個空格