



## 示例 5：探究有向數的四則運算

學習範疇：數與代數

學習單位：有向數及數線

學習階段：第三學習階段

所需教材：詳述於各部分活動內容內

預備知識：數線上序的意念，有向數的概念及基本整數四則運算

主要特徵：

此示例包含三部分，以照顧學生的學習能力差異，如下表。這三部分分別在《課程綱要》基礎部分內的同一課題。

部分	活動	能力稍遜學生	一般能力學生	能力較高學生	
甲	加法和減法			✓	
		氣球模型	✓	✓	可隨意選擇
	乘法	尋找規律	✓	✓	✓
		個案研究	✓	✓	✓
		證明			✓
	除法	溫度計模型	✓	✓	✓
乙	紙牌遊戲	✓	✓	✓	
丙	紙牌遊戲延伸活動			✓	

備註：✓表示學生在開始學習以上課題時可以進行的部分。

示例 5

.....

甲部：透過日常生活例子說明有向數的基本四則運算

(I) 加法和減法

這示例介紹兩個不同的方法：“磁鈕模型”和“氣球模型”來引入有向數的加法和減法。後者對學生能力要求不高，能幫助學生明白有向數的加法和減法的運算法則。

(II) 乘法

這部分包含三個活動。活動一是透過觀察數字規律，來幫助學生掌握有向數乘法法則的直觀意念；再透過活動 2 的個案研習，讓學生鞏固這些法則。活動 3 是為較高能力的學生而設計的，要求學生證明以下結果：「當兩個有向數相乘時，若這兩數的正負號相同，則結果是正數；若這兩個數的正負號是相反，則結果是負數。」

(III) 除法

這部分為個案研習，學生可從中推出有向數除法的法則。

乙部：紙牌遊戲

遊戲要求學生應用甲部所學有向數的四則運算法則，從一疊單面分別印上由-10至-1 數字的紙咭，抽取四張，然後運用算術符號“+”、“-”、“×”、“÷”或“( )”，連同四個抽出的有向數組成一條其值等於 24 的數式。此遊戲與甲部活動比較，難度不高，若時間許可，活動可以給所有學生以比賽形式進行。

丙部：乙部紙牌遊戲的延伸

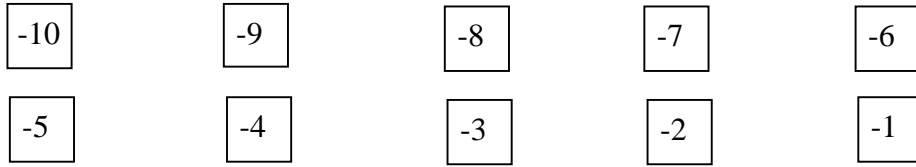
要求學生找出由給定四個有向數而構成等於 24 的數式的總數。因此，部分的難度頗高，故較適合能力較高的學生。

有關乙部遊戲的課前準備：

教師必須準備數疊內容如下的紙牌：

1. 每疊紙牌 40 張。

2. 將數字 -10、-9、-8、...、-3、-2、-1 分別印於每張紙牌的一面。



3. 在每疊紙牌中，每個數字共出現四次。

活動內容：





甲部：

### (I) 加法和減法

方法 1：“磁鈕”模型

所需教材：磁鈕、白板

活動的詳情：

1. 準備紅色和白色磁鈕各 10 粒。
2. 讓學生自行決定以那種顏色代表“正”和“負”。在以下的描述內，我們以紅色代表“正”。
3. 每個磁鈕代表 1 單位，所以  代表“+1”，而  代表“-1”。
4. 利用磁鈕向學生解釋有向數加法和減法的概念，當中包括：
  - (a) 一個紅色磁鈕和一個白色磁鈕組合得出一個“零”，亦即是“+1”加“-1”等於 0。
  - (b) 加一個有向數表示加入相應數量的紅色或白色磁鈕，顏色由有向數的正、負號決定。
  - (c) 減一個有向數表示取走相應數量的紅色或白色磁鈕，顏色由有向數的正、負號決定。
5. 利用表 1 建議的例子或其他例子，指導學生觀察一般規律，可於舉例時提出以下問題：

## 示例 5

### 加法

- i) 餘下磁鈕多少？它們是什麼顏色？
- ii) 餘下的磁鈕代表那個有向數？
- iii) 對於兩個正、負號相同的有向數，相加會否改變答案的正、負號？
- iv) 當兩個正、負號相反的有向數相加如情況 3 和 7 時，會產生多少個“零”？答案是甚麼符號？那一個原本的數會影響答案的正、負號？與另一數比較，此數有何一般特徵(如情況 3 中的“-4”或情況 7 中的“+4”)？

### 減法

- i) 現有兩粒紅色磁鈕但須取去四粒紅色磁鈕，我們可以怎樣處理？
- ii) 在每一個情況中，我們須要加入多少個“零”？請解釋。
- iii) 在取去所需的磁鈕後，餘下磁鈕多少粒？它們是甚麼顏色？
- iv) 餘下的磁鈕代表甚麼有向數？
- v) 當兩個正、負號相同的有向數相減，答案的正、負號是否與原來的有向數的正、負號相反？減法是否經常令正、負號改變(如情況 4 與 8)？
- vi) 當兩個正、負號相反的有向數相減，哪一個數會影響答案的正、負號？
- vii) 與另一數比較，這個影響答案符號的數字有何一般特徵（如情況 4 中的“+4”或情況 8 中的“-4”）？

### 6. 指導學生觀察以下情況：

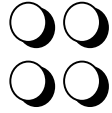
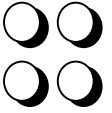
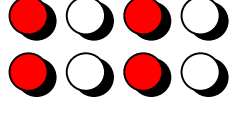
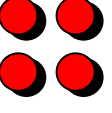
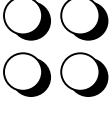
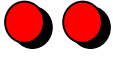



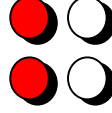
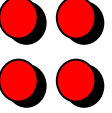

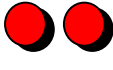
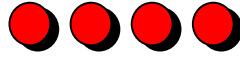
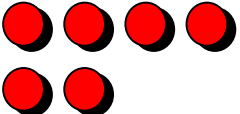

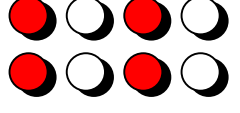
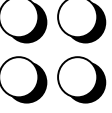
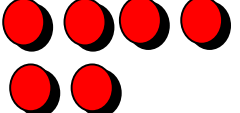

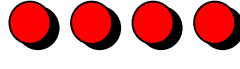
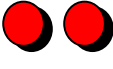
- i) 取走紅色磁鈕與加入白色磁鈕是對等的，用數學語言來說，即是  $a - (+b) = a + (-b)$ 。
- ii) 當兩個正、負號相同的有向數相加，答案的正、負號與原本兩數相同，但相減時，情況則不一定相同。
- iii) 當兩個正、負號相反的有向數相加，答案的正、負號會與原本較大數值的有向數（較有影響的數）的正負號相同，而答案的數值就等於原本兩向數數值之差，如情況 3。

## 加法和減法

當作加法運算時，配對紅、白磁鈕使之組成“零”，並數數餘下磁鈕的數目。

當作減法運算時，如果磁鈕數目足夠，就取走所需的數量，不足的話，就加入適量的“零”，即紅、白磁鈕合成對，使之達至需要取去磁鈕的數量。

下表列舉了一些例子。

情況	數式	開始	加入磁鈕	取走磁鈕	餘下磁鈕
1	$0 + (-4) = -4$	沒有磁鈕			
2	$0 - (+4) = -4$	沒有磁鈕	 (4 個零)		
3	$(+2) + (-4) = -2$				
4	$+2 - (+4) = -2$		 (2 個零)		
5	$+2 + (+4) = +6$				
6	$+2 - (-4) = +6$		 (4 個零)		
7	$-2 + (+4) = +2$				

示例 5



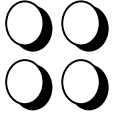



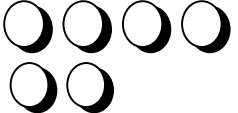

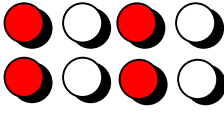
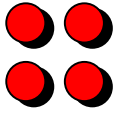
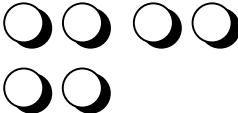
情況	數式	開始	加入磁鈕	取走磁鈕	餘下磁鈕
8	$-2 - (-4) = +2$		 (2 個零)		
9	$-2 + (-4) = -6$				
10	$-2 - (+4) = -6$		 (4 個零)		

表 1

方法 2：氣球模型

所需教材：高映機、箱頭筆、膠片及印上大氣球、氦氣球和沙包的顏色膠片

活動的詳情：

1. 課堂開始時，教師概括描述活動，包括解釋“+1”和“-1”所代表的意思及在此模型下，加法和減法的意義。教師可說明選取適當正、負號的重要性，即是習慣地，“+1”代表氣球升高一個單位。在解釋加法和減法的意義時，可用類似磁鈕模型的解釋。
2. 將學生分組，派發工作紙 5.1。就工作紙內其中一個情況，幫助學生建立數式。
3. 要求學生討論表 5.1 的各種情況，並於表中，寫下他們估計的數式及答案。
4. 邀請組代表展示他們在表 5.1 中的發現及引導他們檢視答案（參考答案見於教師注意事項內）。
5. 引導學生發現移除氦氣球與掛上相同數量的沙包是對等的，用數學語言來說，對任意正整數  $a$  和  $b$ ， $a - (+b) = a + (-b)$ 。此外，移除沙包與掛上相同數量的氦氣球亦是對等的，類似前者，我們得到以下的結論：對任意正整數  $a$  和  $b$ ， $a - (-b) = a + b$ 。
6. 著學生注意到向上升 2 單位等同在數線上向右移動 2 單位。同樣地，向下降 6 單位等同在數線上向左移動 6 單位，如圖 5.1 所示。

示例 5

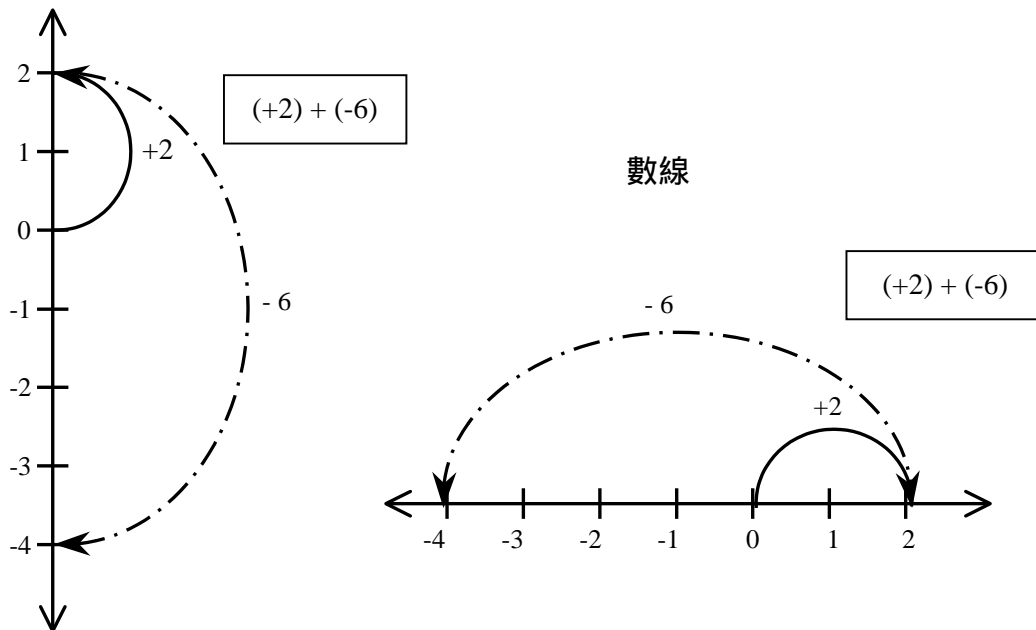


圖 5.1

7. 一如磁鈕模型，引導學生發現有向數的加減運算規律。如展示交換律的例子：

著學生計算  $(+2) + (-4)$  和  $(-4) + (+2)$ 。雖然在模型中，兩數式代表不同情況，但結果都是一樣。例如，熱氣球上升 2 單位，然後下降 4 單位與熱氣球先下降 4 單位，然後上升 2 單位是不同。


期望學生能從這些結果推論出交換律  $a + b = b + a$ 。


教師更可進一步討論  $(+2) - (+4)$  和  $(+4) - (+2)$  來展示有向數相減是不符合交換律的。

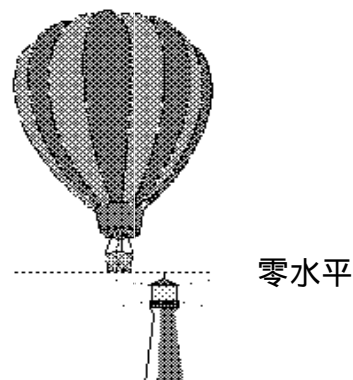
8. 透過氣球模型的討論，教師應能幫助學生在數線上進行加、減運算，即是加正數  $x$  代表在數線上向右移  $x$  單位，而減正數  $x$  代表在數線上向左移  $x$  單位。另一方面，加負數  $-x$  代表向左移  $x$  單位和減負數  $-x$  代表向右移  $x$  單位。



### 工作紙 5.1：個案研究 — 氣球模型

某天天朗氣清，一個熱氣球繫鏈於塔頂零水平的位置。如果每一個被鈎上的沙包可使熱氣球從塔頂下降一個單位。另一方面，每一個被鈎上的氫氣

球則使熱氣球從塔頂上升一個單位。



假設熱氣球現正停留於塔頂並鈎上相同數量的氫氣球和沙包。

情況	內容	數式
1	假設你先鈎上 3 個氫氣球，然後再鈎上 5 個氫氣球，熱氣球的最後位置在那裏？在塔頂之上/下？在何處？	$( ) + ( ) = ( )$
2	假設你先鈎上 3 個氫氣球，然後再鈎上 5 個沙包，熱氣球的最後位置在那裏？在塔頂之上/下？在何處？	$( ) + ( ) = ( )$
3	假設你先鈎上 3 個沙包，然後再鈎上 5 個氫氣球，熱氣球的最後位置在那裏？在塔頂之上/下？在何處？	
4	假設你先鈎上 3 個沙包，然後再鈎上 5 個沙包，熱氣球的最後位置在那裏？在塔頂之上/下？在何處？	
5	假設你先鈎上 3 個氫氣球，然後移除 5 個氫氣球，熱氣球的最後位置在那裏？在塔頂之上/下？在何處？	$( ) - ( ) = ( )$
6	假設你先鈎上 3 個氫氣球，然後移除 5 個沙包，熱氣球的最後位置在那裏？在塔頂之上/下？在何處？	

**示例 5****工作紙 5.1**

---

情況	內 容	數 式
7	假設你先鈎上 3 個沙包，然後再移除 5 個氫氣球，熱氣球的最後位置在那裏？在塔頂之上/下？在何處？	
8	假設你先鈎上 3 個沙包，然後再移除 5 個沙包，熱氣球的最後位置在那裏？在塔頂之上/下？在何處？	

表 5.1

(II) 乘法

活動 1：尋找有向數乘法的規律

1. 展示一個負數與一個正數的積是一個負數。

首先，要求學生完成以下各題：

$$4 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$0 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

要求學生觀察上述趨勢，並尋找規律(每次遞減 4)，然後提出問題「如果這規律延續下去，你期望得到什麼答案？」

寫下以下數式，並著學生完成。

$$-1 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-2 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. 展示一個正數與一個負數的積是一個負數。

同上，要求學生完成以下各題：

$$4 \times 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 \times 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 \times 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 \times 0 = \underline{\hspace{2cm}}$$

要求學生觀察上述趨勢，並尋找規律(每次遞減 4)，然後提出問題「如果這規律延續下去，你期望得到什麼答案？」

寫下以下數式，並著學生完成。

$$4 \times (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4 \times (-2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. 展示兩個負數的積是一個正數。

在這裏，我們以一個負數作為乘數。

經過早前的討論，學生應該能夠於以下的空格填寫答案：

$$4 \times (-4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3 \times (-4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2 \times (-4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1 \times (-4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$0 \times (-4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

寫下以下數式，並著學生完成。

$$-1 \times (-4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-2 \times (-4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

教師與學生討論以下問題：

- a) (i) 一個負數與一個正數的積的符號是什麼？負數為乘數或為被乘數時，結果有何異同？請解釋。  
 (ii) 可否給予一個日常生活的例子，以展示此乘積的意義？
- b) (i) 兩個負數的積的符號是什麼？請解釋。  
 (ii) 可否給予一個日常生活的例子，以展示此乘積的意義？
4. 教師應強調這活動只是一個說明而不是一個正式的證明。完成這活動後，學生或許未能解釋各個結果，尤其是「兩負數的積是一個正數」的情況，但他們透過這活動對有向數相乘的結果有了直觀的概念。
5. 教師應預期大部分學生不能夠在問題 3 的 a 和 b 部分給出日常生活的例子，因此，教師可引進活動 2 以指導學生以日常生活來解釋有關結果。

## 活動 2：個案研究

1. 將學生分組並派發工作紙 5.2。簡介有向數的意義和各個模型中的運算，例如：在氣球模型中，“+2”代表一個氦氣球使熱氣球上升 2 個單位而“-3”代表一個沙包使熱氣球下降 3 個單位，同時“+”代表鉤上而“-”代表移除。在里數模型中，駛向東面汽車的速度為正數而駛向西面的速度為負數。教師應取實物包括沿垂數線作運算以幫助學生建立直觀概念。
2. 從工作紙 5.2 的四個模型中選取兩個作小組討論，要求學生回答工作紙上的問題。
3. 要求一些組代表展示他們的發現，教師就各模型的運算結果作總結。
4. 利用數線模擬里數模型或氣球模型（詳情見教師注意事項）。
5. 根據各模型的運算，指導學生作出以下總結：
  - i) 一個正數代表一個數量的增長(例如：高度的上升/未來的時間)而一個負數代表一個數量的減少(例如：高度的下降/過去的時間)。
  - ii) 對任意兩個正數  $a$  和  $b$ ，
 
$$\begin{aligned} (+a) \times (+b) &= a \times b \\ (+a) \times (-b) &= -a \times b \\ (-a) \times (+b) &= -a \times b \\ (-a) \times (-b) &= a \times b \end{aligned}$$

即是：兩個正、負號相同的向數的積是一個正數，而兩個正、負號相反的向數的積是一個負數。


## 活動 3：(供較高能力的學生進行的活動)

證明兩個正、負號相同的有向數的積是一個正數，而兩個正、負號相反的有向數的積是一個負數。


工作紙 5.2 : 個案研究

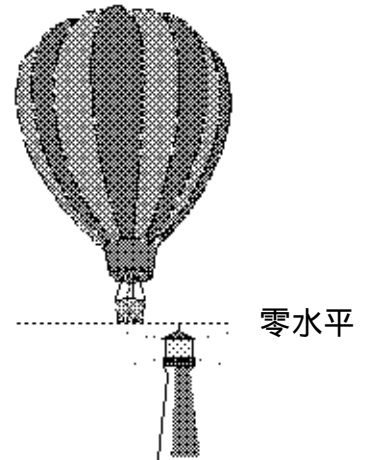
(1) 氣球模型

假設某天天朗氣清，一個熱氣球繫鏈於塔頂零水平的

位置。如果每一個被鈎上的沙包 可使熱氣球從塔

頂下降三個單位。另一方面，每一個被鈎上的氫氣球

 則使熱氣球從塔頂上升兩個單位。



利用有向數代表以下情況：

1. 塔頂以上兩個單位 \_\_\_\_\_
2. 塔頂以下三個單位 \_\_\_\_\_

在以下各情況中，假設氣球在開始時停留於塔頂並鈎上相同數量的氣球和沙包。

情況	你是上升或下降？ 請✓。		以有向數表示 你最後的位置。
	升	降	
1. 鈎上 3 個氫氣球。			
2. 鈎上 2 個沙包。			
3. 移除 3 個氫氣球。			
4. 移除 2 個沙包。			

表 5.2

寫下數式以顯示你怎樣得到在表 5.2 最後一欄的答案。

1. (     ) × (     ) = \_\_\_\_\_
2. (     ) × (     ) = \_\_\_\_\_
3. (     ) × (     ) = \_\_\_\_\_
4. (     ) × (     ) = \_\_\_\_\_

(2) 收入與支出模型

假設你找到一份暑期工作，每日可賺取\$150，但如果你放假，每日便會支出\$100。

情況 1： 你在工作中並賺取薪酬。  
與今天比較，3日後你是較富裕或是較貧困？  
相差款額多少？

情況 2： 你在休假中並支出款項。  
與今天比較，3日後你是較富裕或是較貧困？  
相差款額多少？

情況 3： 你返回工作並賺取薪酬。  
與今天比較，3日前你是較富裕或是較貧困？  
相差款額多少？

情況 4： 你再次休假並支出款項。  
與今天比較，3日前你是較富裕或是較貧困？  
相差款額多少？

以有向數表示你所賺取的薪酬/支出的款項及過去日子的數目/未來日子的數目，並寫下數式以顯示你怎樣得到上述四種情況的答案。

1. ( ) × ( ) = \_\_\_\_\_

2. ( ) × ( ) = \_\_\_\_\_

3. ( ) × ( ) = \_\_\_\_\_

4. ( ) × ( ) = \_\_\_\_\_

(3) 泳池注水/排水模型

情況 1： 你正以每秒 4 公升的速度注水入泳池。  
與現時的一刻作比較，五秒鐘後，池水的體積會怎樣改變？增加或減少？數量多少？

情況 2： 你正以每秒 4 公升的速度排水。  
與現時的一刻作比較，五秒鐘後，池水的體積會怎樣改變？增加或減少？數量多少？

情況 3： 你正以每秒 4 公升的速度注水入泳池。  
與現時的一刻作比較，五秒鐘前，池水的體積會怎樣改變？增加或減少？數量多少？

情況 4： 你正以每秒 4 公升的速度排水。  
與現時的一刻作比較，五秒鐘前，池水的體積會怎樣改變？增加或減少？數量多少？

以有向數表示注入池中/排出池外的水之體積及過去/未來的時間，並寫下數式以顯示你怎樣得到上述四種情況的答案。

1. (     ) × (     ) =

---

2. (     ) × (     ) =

---

3. (     ) × (     ) =

---

4. (     ) × (     ) =

---



(4) 里數模型

假設你現正站於路旁，並取向東行的里數為正數而向西行的里數為負數。若你處於零的位置，東面一公里的市鎮位於+1 公里和西面兩公里的市鎮位於-2 公里。

現時，一輛汽車經過你的位置。

情況 1：假設這車輛以時速 75 公里向東行，兩小時後，它將在那裏？

情況 2：假設這車輛以時速 75 公里向東行，兩小時前，它在那裏？

情況 3：假設這車輛以時速 75 公里向西行，兩小時後，它將在那裏？

情況 4：假設這車輛以時速 75 公里向西行，兩小時前，它在那裏？

寫下數式以顯示你怎樣得到上述四種情況的答案。

1. (     ) × (     ) = \_\_\_\_\_

2. (     ) × (     ) = \_\_\_\_\_

3. (     ) × (     ) = \_\_\_\_\_

4. (     ) × (     ) = \_\_\_\_\_

示例 5

(III) 除法：個案研究 — 溫度計模型

1. 教師帶備一枝溫度計進入班房，並提問學生可讀取溫度的範圍，然後再與學生討論下列各種情況：
  - (i) 假設現時溫度是 0 度而溫度平均每小時上升 2 度。
    - (a) 3 小時後，氣溫是多少度？
    - (b) 須多少時間，溫度才上升至 14 度？
  - (ii) 假設現時溫度是 0 度而溫度平均每小時下降 3 度。
    - (a) 4 小時前，氣溫是多少度？
    - (b) 須多少時間，溫度才下降至 -15 度？
    - (c) 何時氣溫是 24 度？
  - (iii) 假設現時溫度是 0 度，如果溫度於 6 小時內下降至 -24 度，溫度每小時改變多少度？
2. 要求學生以有向數代表下降和上升的溫度及過去和未來的時間。
3. 邀請學生在黑板上寫下數式，以顯示怎樣得到點 1 中問題的答案。對於能力稍遜的學生，教師可以一枝大型溫度計，以逐度顯示溫度下降或上升，從而將結果具體化。
4. 引導學生總結下列除法的運算法則：

$$\text{對任意兩個正數 } a \text{ 和 } b, \quad \frac{(+a)}{(+b)} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{(+a)}{(-b)} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{(-a)}{(+b)} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{(-a)}{(-b)} = \frac{a}{b}$$

5. 提醒學生當他們將右邊乘以左邊的分母，他們可以得到有向數乘法的法則。換言之，乘法運算法則可推出除法運算法則。



## 乙部：紙牌遊戲

活動詳情：

1. 將學生以四人為一組分組，派發每組紙牌一疊及工作紙 5.3。
2. 向學生解釋遊戲規則。
  - (a) 洗混紙牌，並將首四張紙牌的面向上平放於檯上。
  - (b) 以“+”、“-”、“×”、“÷”或“( )”等運算符號，將四個紙牌上的有向數構成一條等於 24 的數式。

例如：

四個有向數	組成數式
-4, -3, -2, -1	$(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4)$
	$((-1) + (-2) + (-3)) \times (-4)$

- (c) 在每組中，誰以最短的時間得到答案便為優勝者，可取得 1 分。將結果記錄於工作紙 5.3 內表 5.3 中。
  - (d) 繼續以餘下的紙牌遊戲。
  - (e) 如果組內成員對四個有向數沒有任何回應，學生須要將這組有向數填寫於表 5.3 第一欄內，並畫上陰影。
3. 邀請各組代表寫下各組有向數的組成數式，其他組別成員可對同一組有向數，加入其他組合。
4. 邀請學生寫下找不到數式的四個有向數，並與學生討論及反複驗算是否找不到數式。





## 丙部分：紙牌遊戲

### 活動詳情：

1. 接著乙部分的活動討論，將同一組有向數可構成的數式的數目相加，以挑戰學生找出這組有向數能構成等於 24 的數式的總數。
2. 向學生解釋遊戲規則：
  - i) 在工作紙 5.4 中，學生須對既定的四個有向數，以運算符號“+”、“-”、“ $\times$ ”、“ $\div$ ”或“( )”去構作數式，例如，在乙部所舉的例子，向數 -1、-2、-3 和 -4 有兩種不同構作數式的方法。
  - ii) 以形式  $a \times b \times c \times d$ 、 $b \times a \times c \times d$ 、 $a \times c \times b \times d$  等出現的數式是相同的，只可數一次。加法亦是一樣。
  - iii) 以形式  $a \div b \times c \times d$ 、 $c \div b \times a \times d$ 、 $d \div b \times a \times c$ ； $a \times c \times d \div b$  與形式  $d \div b \times a \times c$  是相同的，不可重複計算。
  - iv) 以形式  $(a-b) \times c \div d$ 、 $(a-b) \div d \times c$ 、或  $c \div d \times (a-b)$  出現的數式是相同的。
3. 向學生解釋以上計算規則只為方便數算，學生可隨意改動以上計算規則。
4. 派發工作紙 5.4，著學生記錄結果並期望他們於 20 分鐘內完成工作。
5. 與學生討論答案。

工作紙 5.4 : 紙牌遊戲

四個有向數	數式	數式總數
-2,-2,-8,-10		
-2,-3,-7,-9		
-3,-4,-5,-10		
-3,-5,-7,-9		
-4,-4,-4,-10		
-4,-7,-8,-10		
-5,-5,-5,-5		
-5,-6,-8,-10		
-6,-7,-8,-10		
-8,-8,-8,-10		

表 5.4

教師注意事項：

甲部

(I) 加法和減法

方法 1：“磁鈕”模型

1. 活動後，學生可得到以下結論：

對任意正數  $a$  和  $b$ ，

加法

$$(+a) + (+b) = a + b$$

$$(+a) + (-b) = a - b$$

$$(-a) + (+b) = -a + b$$

$$(-a) + (-b) = -a - b$$

減法

$$(+a) - (+b) = a - b$$

$$(+a) - (-b) = a + b$$

$$(-a) - (+b) = -a - b$$

$$(-a) - (-b) = -a + b$$

(II) 乘法

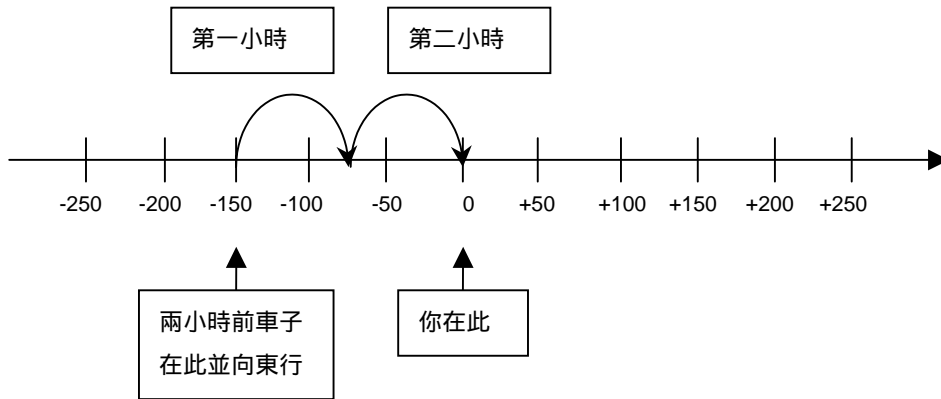
活動 2：個案研究

1. 個案研究的答案：

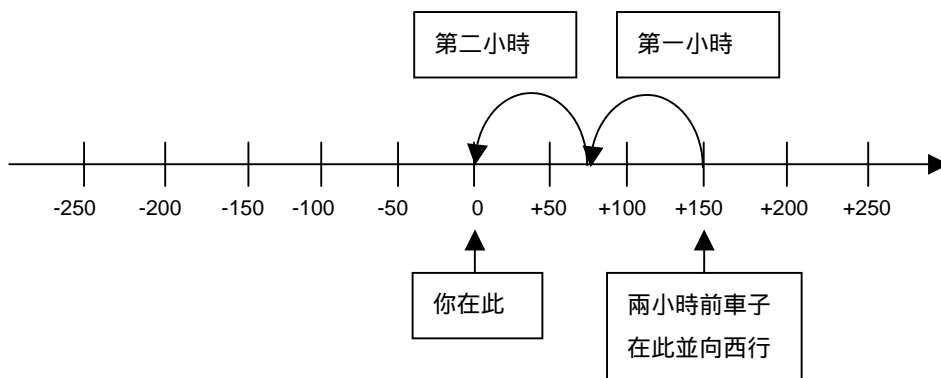
模型	數式
氣球模型	1. $(+2) \times (+3) = +6$ 2. $(-3) \times (+2) = -6$ 3. $(+2) \times (-3) = -6$ 4. $(-3) \times (-2) = +6$
收入與支出模型	1. $(+150) \times (+3) = +450$ 2. $(-100) \times (+3) = -300$ 3. $(+150) \times (-3) = -450$ 4. $(-100) \times (-3) = +300$
泳池注水/排水模型	1. $(+4) \times (+5) = +20$ 2. $(-4) \times (+5) = -20$ 3. $(+4) \times (-5) = -20$ 4. $(-4) \times (-5) = +20$
里數模型	1. $(+75) \times (+2) = +150$ 2. $(+75) \times (-2) = -150$ 3. $(-75) \times (+2) = -150$ 4. $(-75) \times (-2) = +150$

示例 5

2. 教師可以數線解釋有向數乘法的概念，以里數模型說明如下：  
情況 2：



情況 4：





(III) 除法

1. 個案研究的答案：

溫度計模型	數式
(I)	$2 \times 3 = 6(\text{度})$ $\frac{(+14)}{(+2)} = 7(\text{小時})$
(II)	$(-3) \times (-4) = 12(\text{度})$
	$\frac{(-15)}{(-3)} = 5(\text{小時})$
	$\frac{(+24)}{(-3)} = -8, 8 \text{ 小時前}$
(III)	$\frac{(-24)}{(+6)} = -4, \text{ 每小時下降 } 4 \text{ 度}$

活動 3：正式證明(只供較高能力的學生進行)

預備知識：加法分配律

證明兩個正、負號相同的有向數的積是一個正數，而兩個正、負號相反的有向數的積是一個負數。

證明

對任意正數  $a$  和  $b$ ，

$$\begin{aligned}
 a + (-a) &= 0 \\
 [a + (-a)] \times b &= 0 \times b \\
 a \times b + (-a) \times b &= 0 \\
 (-a) \times b &= -a \times b \quad \text{且} \quad (-a) \times b < 0
 \end{aligned}$$

類似地，我們可以證明  $a \times (-b)$  是負數，且等於  $-a \times b$ 。

另一方面，

$$\begin{aligned}
 a + (-a) &= 0 \\
 [a + (-a)] \times (-b) &= 0 \times (-b) \\
 a \times (-b) + (-a) \times (-b) &= 0 \\
 (-a) \times (-b) &= -a \times (-b) \quad \text{且} \quad (-a) \times (-b) > 0
 \end{aligned}$$

同時，

$$\begin{aligned}
 a \times (-b) + (-a) \times (-b) &= 0 \\
 -a \times b + (-a) \times (-b) &= 0 \\
 (-a) \times (-b) &= a \times b \quad \text{且} \quad (-a) \times (-b) > 0
 \end{aligned}$$

示例 5

乙部和丙部

1. 設定數式的值為 24，是因為它是最小的正數而擁有最多介乎於-10 與-1 之間的因數。教師可取用其他數值。
2. 由 1 至 10 正整數組成 24 遊戲的詳情，可見於以下一書：

王紹川主編。胡大同、王朝輝副主編。《數學 24 遊戲》。1994 年 11 月第 1 版。煤炭工業出版社。

教師須要對書中所列的結果作些修訂，以符合示例中所給予的負數。

例如：

書 內		修 訂	
四個正整數	數式	四個正整數 有向數	數式
2, 2, 8, 10	$(10 - 2) \times 2 + 8$	-2, -2, -8, -10	$((-10) - (-2)) \times (-2) - (-8)$
	$10 \times 2 + 8 \div 2$		$(-10) \times (-2) + (-8) \div (-2)$
2, 3, 7, 9	$(7 - 2) \times 3 + 9$	-2, -3, -7, -9	$((-7) - (-2)) \times (-3) - (-9)$
	$3 \times (9 + 7) \div 2$		無
3, 4, 5, 10	$10 \div 5 \times 3 \times 4$	-3, -4, -5, -10	$(-10) \div (-5) \times (-3) \times (-4)$
	$(5 - 3) \times 10 + 4$		$((-5) - (-3)) \times (-10) - (-4)$
	$3 \div 5 \times 4 \times 10$		無
	$4 \div 5 \times 10 \times 3$		無

3. 工作紙 5.4 的建議答案：

四個有向數	數式	數式總數
-2, -2, -8, -10	$(-10 - (-2)) \times (-2) - (-8)$ $(-10) \times (-2) + (-8) \div (-2)$	2
-2, -3, -7, -9	$(-7 - (-2)) \times (-3) - (-9)$	1
-3, -4, -5, -10	$(-10) \div (-5) \times (-3) \times (-4)$ $(-5 - (-3)) \times (-10) - (-4)$	2
-3, -5, -7, -9	$-[-3 + (-5) + (-7) + (-9)]$ $(-9) \times (-5) - (-3) \times (-7)$ $((-9) + (-3)) \times ((-7) - (-5))$	3
-4, -4, -4, -10	$(-4) \times (-10) - (-4) \times (-4)$	1
-4, -7, -8, -10	無	0
-5, -5, -5, -5	$(-5) \times (-5) - (-5) \div (-5)$	1
-5, -6, -8, -10	$(-5) \times (-8) + (-10) + (-6)$ $((-8) - (-5)) \times (-10) + (-6)$ $((-8) \times (-5)) \div (-10) \times (-6)$	3
-6, -7, -8, -10	$(-7 + (-6) - (-10)) \times (-8)$ $(-8 - (-6)) \times (-7) - (-10)$	2
-8, -8, -8, -10	$(-10 - (-8)) \times (-8) - (-8)$	1

示例 5

.....

參考網址：

1. 負數的歷史  
<http://www.edp.ust.hk>
2. 有向數的加法與減法  
<http://riceinfo.rice.edu/armadillo/Algebra/Lessons/Negative>  
<http://www.col-ed.org/cur/math>
3. 有向數的乘法與除法  
<http://riceinfo.rice.edu/armadillo/Algebra>  
<http://forum.swarthmore.edu/dr.math>  
<http://www2.ncsu.edu/unity/lockers/users/f/felder/public>

書籍：

1. Stein, Sherman K. (1996). *Strength in numbers: discovering the joy and power of mathematics in everyday life*. New York: John Wiley.
2. 王紹川主編。胡大同、王朝輝副主編。《數學 24 遊戲》。1994 年第 1 版。中國：煤炭工業出版社。

附件：參考資料

## 負數

我國在《九章算術》《方程》章中就引入了負數 (negative number) 的概念和正負數加減法的運算法則。在某些問題中，以賣出的數目為正 (因是收入)，買入的數目為負 (因是付款)；餘錢為正，不足錢為負。在關於糧谷計算中，則以加進去的為正，減掉的為負。「正」、「負」這一對術語從這時起一直沿用到現在。

在《方程》章中，引入的正負數加法法則稱為「正負術」。正負數的乘除法則出現得比較晚，在 1299 年朱世杰編寫的《算學啟蒙》中，《明正負術》一項講了正負數加減法法則，一共八條，比《九章算術》更加明確。在「明乘除段」中有「同名相乘為正，導名相乘為負」之句，也就是

$$\begin{aligned} (+a) \times (+b) &= +ab, & (-a) \times (-b) &= +ab, \\ (+a) \times (-b) &= -ab, & (-a) \times (+b) &= -ab, \end{aligned}$$

這樣的正負數乘法法則，是我國最早的記載。宋末李冶還創用在算籌上加斜劃表示負數，負數概念的引入是中國古代數學最傑出的創造之一。

印度人最早提出負數的是公元 628 年左右的婆羅摩笈多 (約 598-665)。他提出了負數的運算法則，並用小點或小圈記在數字上表示負數。在歐洲初步認識提出負數概念，最早要算意大利數學家斐波那契 (1170-1250)。他在解決一個盈利問題時說：我將證明這個問題不可能有解，除非承認這個人可以負債。15 世紀的舒開 (1445?-1510?) 和 16 世紀的史提非 (1553) 雖然他們都發現了負數，但又都把負數說成是荒謬的數，卡當 (1545) 給出了方程的負根，但他把它說成是「假數」。韋達知道負數的存在，但他完全不要負數。笛卡兒部分地接受了負數，他把方程的負根叫假根，因它比「無」更小。

哈雷奧特 (1560-1621) 偶然地把負數單獨地寫在方程的一邊，並用「-」表示它們，但他並不接受負數。邦別利 (1526-1572) 給出了負數的明確定義。史提文在方程裡用了正、負系(係)數，並接受了負根。基拉德 (1595-1629) 把負數與正數等量齊觀、並用減號「-」表示負數。總之在 16、17 世紀，歐洲人雖然接觸了負數，但接受負數的進展是緩慢的。

註：此文取材自網址 <http://www.edp.ust.hk>。