

題目：用 GeoGebra 互動幾何軟件輔助學習「周界」

講者： 陳鋼博士（教育局 小學校本課程發展組）
陳兆東老師（仁濟醫院陳耀星小學）

背景

周界是高小數學科度量範疇的課題。學生在四年級學習周界的概念、量度平面圖形的周界、計算正方形和長方形的周界及計算由正方形和長方形拼砌成的圖形的周界；到了六年級，就學習圓周的概念及計算方法（課程發展議會，2000）。學生在周界課題的學習表現是頗為參差的。學生應付簡單的周界問題，似乎沒有多大困難，例如圖形已提供所有邊長，學生能把各邊長總和相加求得周界。但當遇到困難的問題，學生會因為未有好好掌握概念而未能成功解題。例如圖形沒有提供所有邊長，要求學生推測圖形中某些邊的長度，學生有時會誤以為資料不足；又例如問題提供兩個形狀頗為相似的圖形，要求學生比較兩圖周界的長短，學生會混淆周界與面積，而導致錯誤解題（Livy, Muir & Maher, 2012）。

科技快速發展，電子教學軟件也迅速發展，當中有兩類軟件頗重要，一是電腦代數系統（英語是 computer algebra system），二是動態幾何軟件（英語是 dynamic geometry software）。電腦代數系統依據用家輸入的數學符號進行運算，例子包括 Mathematica 及 Maple。動態幾何軟件著眼於探究點、線及圖形的關係，如：Cabri 及 Sketchpad 等。兩類軟件發展多年，現今電腦代數系統亦會加入畫圖工具，方便用家想像抽象的數學方程。動態幾何軟件也會加入代數運算，用以解決更廣泛的數學問題（Hohenwarter & Jones, 2007）。GeoGebra 是近年新發展的數學軟件，集電腦代數系統及動態幾何軟件兩者之長，用家能利用編程的方式設件各類課件，展示點、直線、曲線等幾何物件，應用於小學及中學的數學學習。

仁濟醫院陳耀星小學的老師和支援人員共同備課，討論周界課題的部分教學重點，然後設計紙筆練習及 GeoGebra 課件，以輔助學生學習。本文旨在介紹是次教學案例。有一點要留意的，就是這篇文章並非完整講述周界課題的教學，而是選取周界課題內的四個學習點，講述這些學習點的重要性，然後討論相關的教學活動，並講述學生學習時的表現。

周界的教學

接下來，我們將敘述備課時選取的四個教學重點，以及輔助的 GeoGebra 課件及課堂活動，這次分享會的所有 GeoGebra 課件均存放於網頁 <https://www.geogebra.org/m/mden93ex>（圖一）。教師可利用互聯網上的製作二維碼（QR code），把 GeoGebra 網頁製成二維碼，再把編碼派發給學生，學生便能利用平板電腦的二維碼掃描器掃描編碼，開啟 GeoGebra 網頁進行學習活動。

Table of Contents
製作圖形 (Making figures)
P4 Perimeter / 周界
比較圖形周界 (Comparing perimeters)
P4 Perimeter 周界 Q1
P4 Perimeter 周界 Q2
P4 Perimeter 周界 Q3
P4 探究兩相鄰圖形的周界 / Inquiry about perimeters of two adjacent figures
多個圖形的周界 (Figures formed by multiple rectangles)
P4 Perimeter 圖形拼砌
遷移線段求周界 (Translating sides of figures)
P4 Perimeter Irregular Shapes Q1
P4 Perimeter Irregular Shapes Q2
P4 Perimeter Irregular Shapes Q3
P4 Perimeter Irregular Shapes Q4

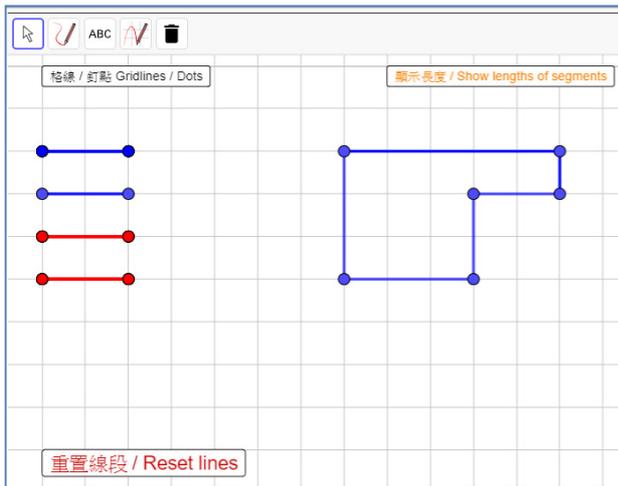
圖一：GeoGebra 周界課件目錄 (<https://www.geogebra.org/m/mden93ex>)。

在備課過程中，教師和支援人員討論學生的學習難點，這些難點都是關於學生沒有清楚了解圖形的周界而導致的。為了具體呈現圖形的周界，好讓學生克服學習的難點，支援人員編寫了四類 GeoGebra 課件，其目的分別是幫助學生鞏固圖形周界的計算、比較兩個圖形的周界、認識拼砌而成圖形的周界及明白遷移線段求周界的技巧，接下來會詳細介紹這些課件。

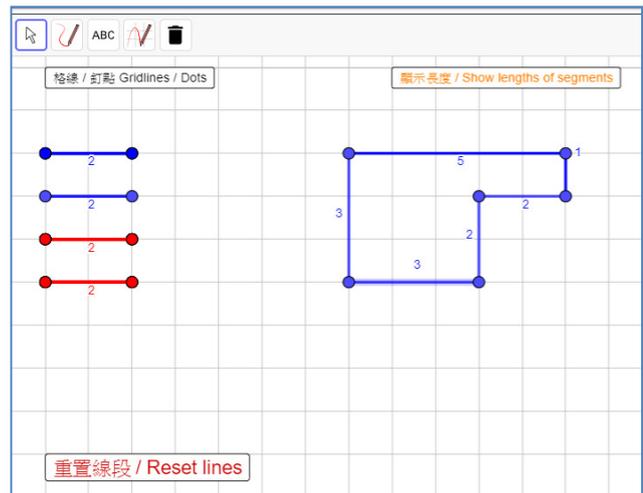
一、 鞏固圖形周界的計算方法

教學初段，學生剛明白圖形周界的計算方法。為了幫助學生熟習周界的計算，教師讓學生製作各類閉合圖形，並計算周界的長度。教師也要求學生製作指定周界的圖案，以鞏固學生對周界的認識。在這部分的教學，重點是讓學生經由製作圖形加深對周界的認識。

為輔助學生繪畫圖形，支援人員編寫了一個 GeoGebra 課件：製作圖形一周界，學生可以用課件的線段製作多邊形（圖二），如果學生想知道各線段的長度，可以自行數出線段的長度，也可以按下課件中顯示長度的按鈕，課件便會顯示各線段的長度（圖三）。

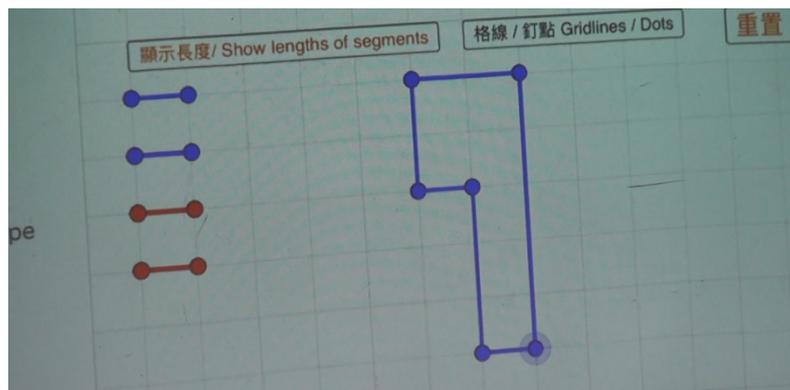


圖二：用 GeoGebra 課件製作圖形



圖三：可用「顯示長度」按鈕顯示線段的長度

在課堂上，教師可以安排周界的不同教學活動。例如，教師讓學生隨意製作由水平線及沿垂線組成的圖形，然後求出圖形的周界，之後學生可按下顯示長度的按鈕，覆核計算圖形的周界。又例如教師要求學生製作指定周長的圖形，課堂所見，既有學生製作簡單的圖案（如長方形），也有學生製作複雜的圖案（如圖四），顯出學生甚有創意。

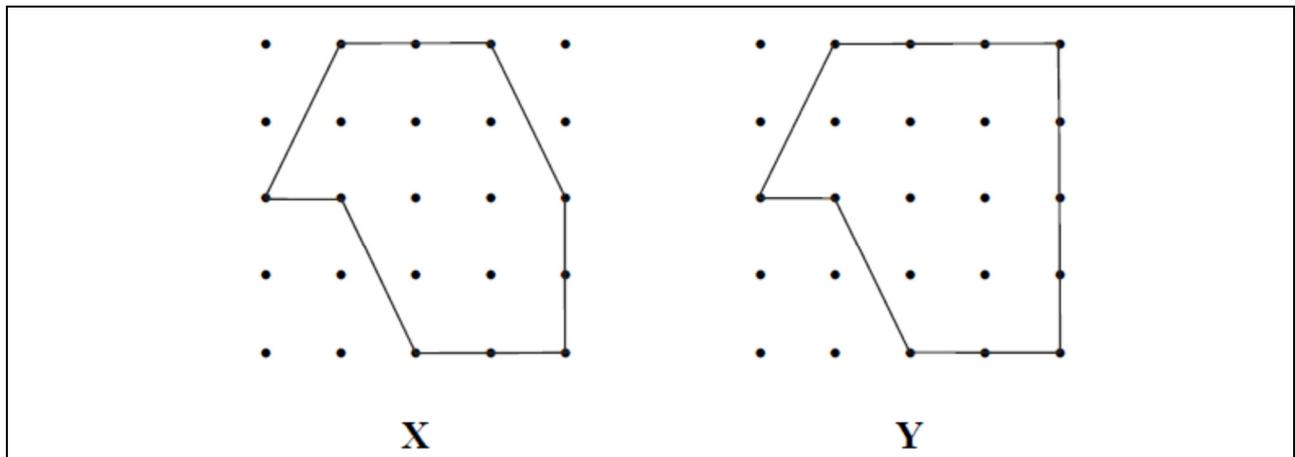


圖四：學生製作周長是 14 單位的圖形

上述提及的活動，也可以用紙筆進行，但是用了平板電腦，學生就能快速製作圖案，即是用相同的活動時間，學生用平板電腦，能製作更多圖案。另一個好處是學生能快速改變圖案。舉例來說，教師要求製作周界是 14 個單位的圖形，學生發現自己原來做了周長是 12 個單位的圖形，那麼學生只要在平板電腦上改變圖案中的某些線段，就能快速修正圖案。如果學生用紙筆繪圖，要改成另一個圖案，學生就要擦掉原本的線段，再補畫新的線段，這工序是頗為費時的。

二、 比較兩個圖形的周界

在學習一個圖形的周界後，接下來是學習比較兩個圖形的周界。如果提供兩個頗為相似的圖形要求學生判斷，學生有時也只是用直觀判斷，未能正確判斷兩圖周界的長短。例如圖五的問題（TSA 數學科 2017 年六年級卷四第 21 題），學生要比較兩圖周界的長短，有學生會以為兩圖不同，不能比較周界的長短，有學生受到兩圖大小的影響，而誤判圖形 X 的周界比圖形 Y 的長。

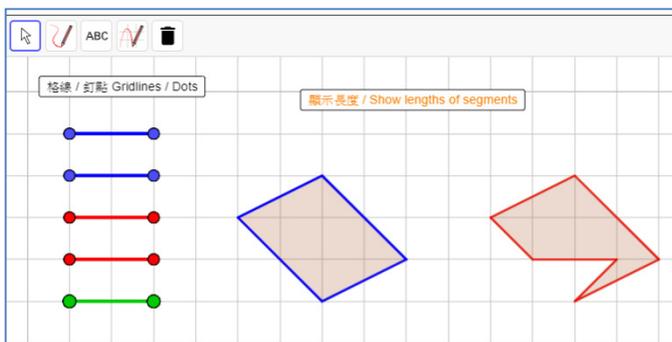


細閱上圖，以下哪項描述是正確的？

- A. X 的周界比 Y 的短。
- B. X 和 Y 的周界相等。
- C. X 的周界比 Y 的長。
- D. 無法比較 X 和 Y 的周界。

圖五：比較兩圖周界的長短

為了讓學生明白比較兩圖周界的技巧，支援人員編寫了幾個 GeoGebra 課件（比較圖形周界—周界 Q1、Q2 及 Q3），其中一個顯示於圖六，學生可以移動圖中的藍色及紅色圖形，以了解兩圖的關係，也可以用圖中提供的線段，或工具列的筆繪畫線段，輔助了解兩圖周界的關係。在活動中，學生可以用課件右上方工具列的筆，標記兩圖相同的部份（圖七），這令學生更容易比較兩圖不同的部分，從而判斷兩圖周界的長短。



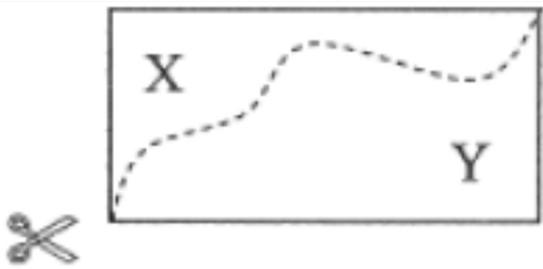
圖六：比較兩圖周界的 GeoGebra 課件



圖七：用畫筆在課件上畫線段

在課堂活動初段，教師讓學生判斷兩圖周界的長短，學生仍是憑直觀印象判斷。當教師講解了在 GeoGebra 課件加上標記，學生漸漸明白不應倚賴直觀判斷，而是要細心觀察兩圖相同和相異的部分，才能準確分辨兩圖周界的長短。

另一類涉及兩圖周界的問題，是由同一幅圖中分割兩圖，然後比較兩圖周界的長短。舉例如下：

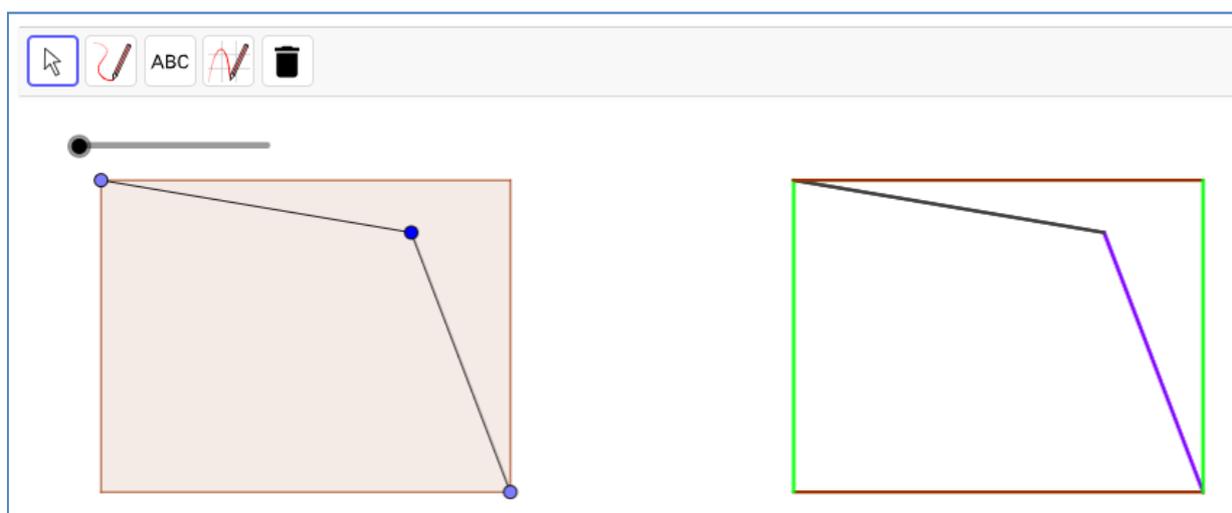


沿着虛線將上圖的長方形剪開成 X 和 Y 兩部分，以下哪項描述是正確的？

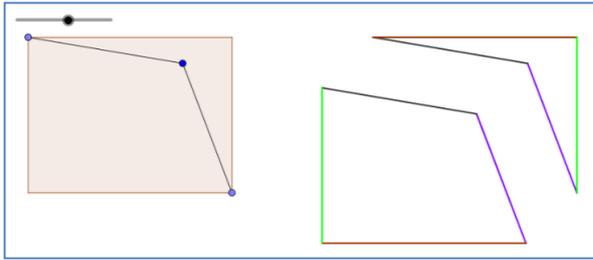
- A. X 部分的周界較短。
- B. Y 部分的周界較短。
- C. X 部分和 Y 部分的周界相等。
- D. 無法比較 X 部分和 Y 部分的周界。

圖八：比較兩個相鄰圖形的周界(TSA 數學科 2007 年六年級卷三第 24 題)

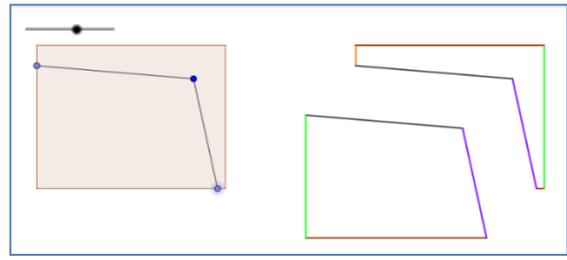
圖九顯示的 GeoGebra 課件（比較圖形周界—探究兩相鄰圖形的周界），能協助教師解說兩圖周界的關係。學生移動圖中滑桿上的黑點，便能分開右方的兩個圖形（圖十），方便學生了解及比較兩圖各邊的長度，從而了解兩圖周界的關係。另外，移動左圖的藍點，也會改變分割的兩個圖形的形狀（圖十一），學生借助移動黑點和藍點，能更深入理解兩圖周界的關係。



圖九：比較兩相鄰圖形周界的 GeoGebra 課件



圖十：移動滑桿上的黑點分開右方的圖形



圖十一：移動藍點改變兩相鄰圖形的形狀

從課堂所見，學生剛觀察課件中的圖形，會認為大的圖形周界較長，直至細心觀察兩圖並且用畫筆記錄兩圖相同長短的線段，才慢慢掌握判斷兩圖周界長短的正确方法。

三、 認識拼砌而成圖形的周界

學生接下來學習解決更複雜的圖形問題。若圖形由多個不同的正方形和長方形組成，計算圖形的周界，學生就要小心判斷圖形各部分的邊長。圖十二的例子要求學生了解複雜圖形與其組成部分的關係。

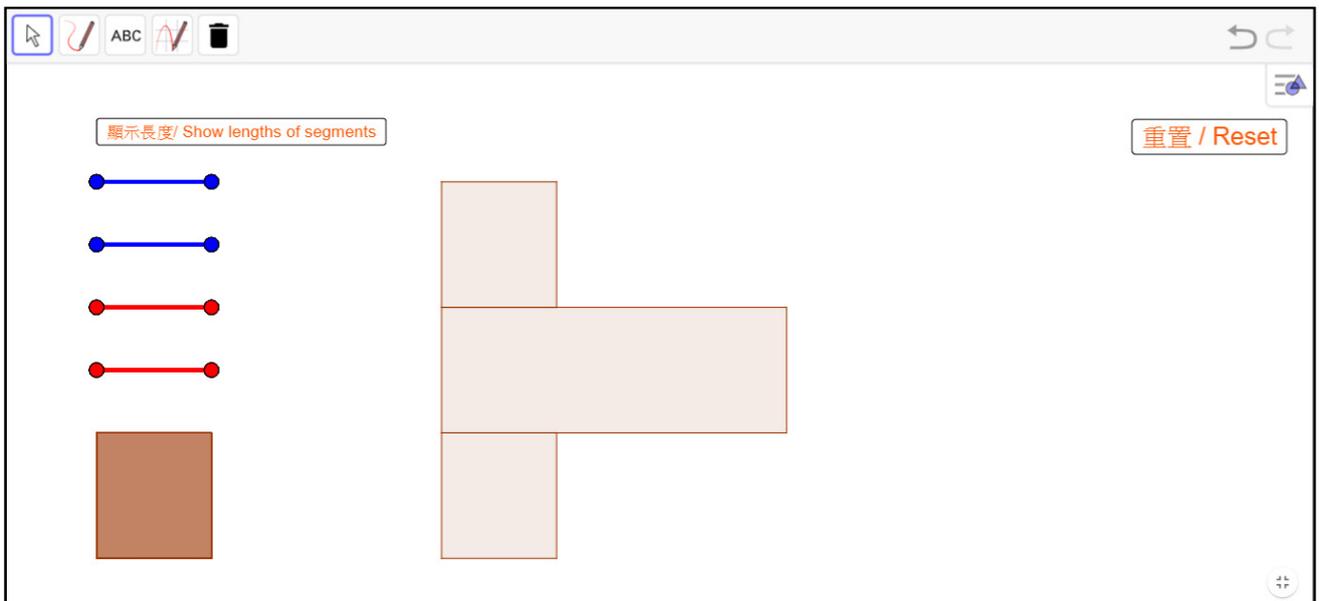
左圖可分割成一個長方形和三個正方形。

(a)長方形的周界是 _____ cm。

(b)一個正方形的周界是 _____ cm。

圖十二：由多個正方形和長方形拼砌而成的圖形及其相關問題(TSA 數學科 2013 年六年級卷三第 26 題)

為協助學生學習複雜圖形的周界，支援人員編寫了一個 GeoGebra 課件 (圖十三)，內有一堆正方形，用家可以把正方形變大或縮小，也可以把正方形改為長方形，然後把圖形拼砌成不同的圖形。學生觀察合併後的圖形，藉此了解圖形周界的變化。

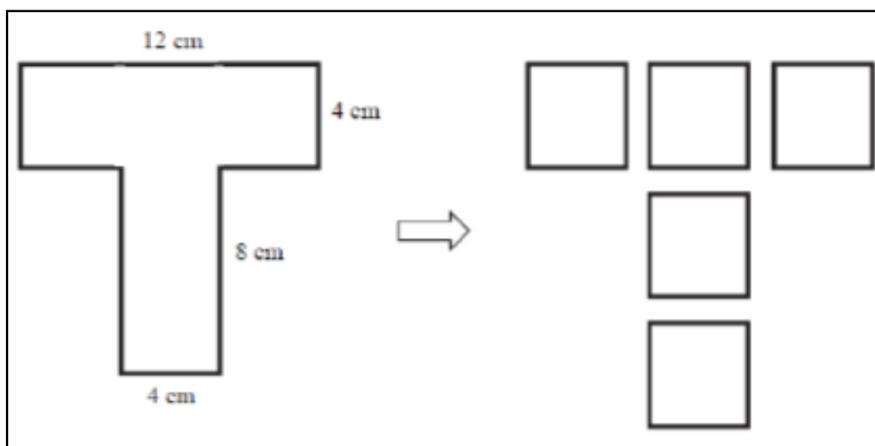


圖十三：可用正方形及長方形組成不同圖形的 GeoGebra 課件

課堂觀察所見，GeoGebra 課件有助加深學生理解複雜圖形。學生經過圖形拼砌，就能理解哪些線段不應包括在合併圖形的周界內，及後學生再做相關的紙筆練習，就能進一步澄清當中的概念。

四、 遷移線段求周界的技巧

在周界課題中，有一個高階的解題技巧，就是運用遷移圖形線段的方法，快速計算圖形的周界。舉例來說，有兩個方法可找到圖十四（TSA 數學科 2016 年六年級卷四第 24 題）左方圖形的周界。第一個方法，是依題意找出各邊的長度，然後計算總和，就能得出圖形的周界，這是基本的方法。第二個方法，是發現左圖的周界，相等於一個邊長是 12 cm 正方形的周界，然後用正方形公式求圖形的周界。第二個方法比較省時，但學生要理解遷移線段的技巧，才能明白左圖的周界相等於一個正方形的周界。



圖十四：左圖能分割成五個大小相同的正方形，求左圖的周界

教師和支援人員設計課堂活動，協助學生明白此進階計算技巧。教師要求學生先估計圖十五內兩個圖形的周界，然後再用計算的方法求周界。學生加上每條邊的長度來求出左圖的周界，再用長方形周界公式求右圖的周界，並發現兩圖周界相同。此時，能力強的學生能解釋為什麼兩圖周界相同，能力一般的學生認為這只是巧合。

2) 猜一猜。圖 C 和圖 D 哪幅圖的周界較長？我認為是 圖 C 較長 / 圖 D 較長 / 一樣長

C	D

請分別計算圖 C 及圖 D 的周界：

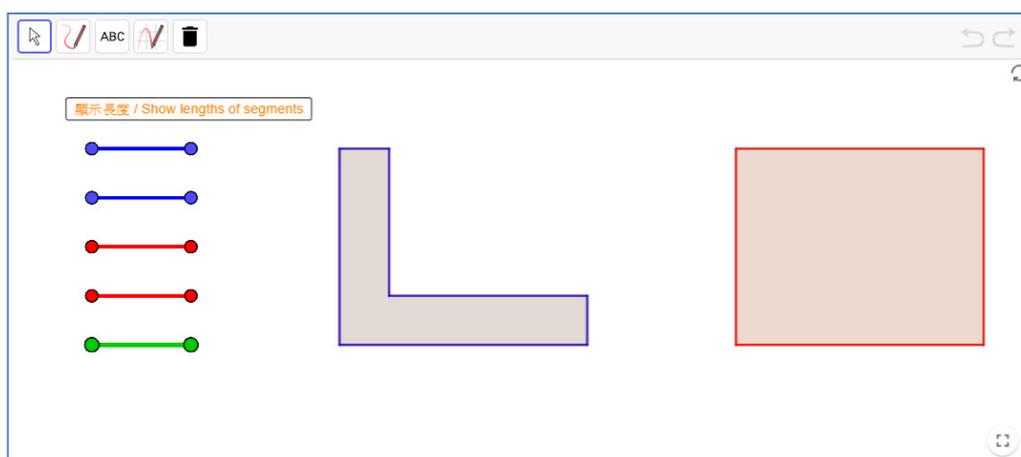
圖 C：列式：_____ = _____ ()

圖 D：列式：_____ = _____ ()

經過計算後，我發現 圖 C 較長 / 圖 D 較長 / 圖 C 和圖 D 一樣長

圖十五 估計及計算兩個圖形的周界

教師可以讓學生使用 GeoGebra 課件遷移周界的技巧（圖十六），移動課件中的圖形，經由比對來了解兩圖周界何時會相等，何時不相等，學會遷移周界的技巧，明白在什麼情況下使用技巧。經過此教學活動，學生更清楚明白遷移線段求周界的技巧了。



圖十六 協助學習遷移線段技巧的 GeoGebra 課件

總結經驗

在這次教學活動，支援人員和教師挑選了四個周界課題的內容，加強了此四部分的教學，由課堂的反應及課後的練習，發現學生在這幾方面都掌握得不錯。運用電子教具，對教師來說，

減省了他們在課前準備部分教材的工夫，也省卻了課後回收及存放教材的時間。對學生來說，他們用電子教具作圖，比用紙筆作圖更快速，學生也能快速移動圖中的線段去製作新的圖形，有助了解改變圖形線段對圖形周界的影響。

最後要強調，雖然本文提及如何運用 GeoGebra 輔助學習周界，但是課堂的教學，不只用了 GeoGebra 課件，也用到紙筆的練習，教學要合理地安排紙筆活動及電子活動，並善用提問，才能促進教學效能。另外，應如何運用電子學習工具，也值得繼續深入探討。例如，教師是先解說，然後讓學生用電子工具做練習，還是先讓學生用電子工具進行探究活動，再一起總結學生的發現？如何能善用電子學習工具，相信是值得繼續研究的課題。

參考文獻

1. Hohenwarter, M. & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: The case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27, 126 – 131.
2. Livy, S., Muir, T., & Maher, N. (2012). How do they measure up? Primary pre-service teachers' mathematical knowledge of area and perimeter. *Mathematics Teacher Education and Development*, 14 : 91 – 112.
3. 課程發展議會(2000)。 **數學課程指引(小一至小六)**。香港：政府印務局。