

題目：「平行四邊形也有直角？」- 四邊形特性及包含關係的教學

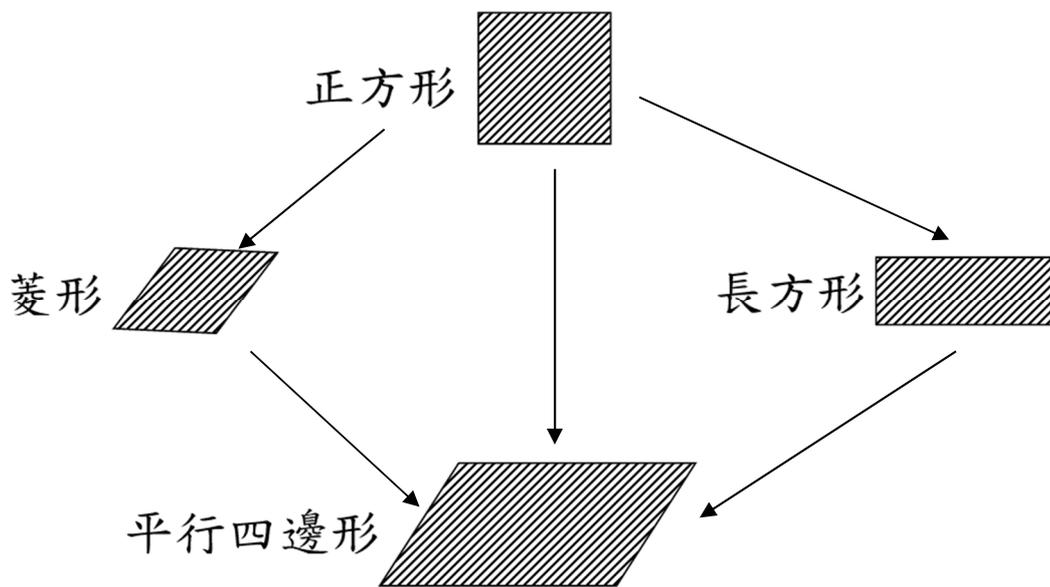
講者：陳鋼博士（教育局 小學校本課程發展組）
許展銓老師 黃穎鴻老師（漢華中學（小學部））

引言

小學數學科正逐步推行新修訂的數學課程，其中一個目標是加強數學課程之縱向銜接（課程發展議會，2017a）。在圖形與空間範疇，新課程加入了圖形包含關係的學習內容，例如所有正方形皆是菱形、所有長方形皆是平行四邊形等。漢華中學（小學部）本學年參加了校本支援計劃，四年級的教師與支援人員共同備課，探討教授這個課題的方法。本文旨在介紹四邊形的包含關係，教師在教授此課題時所用的教學方法，及學生的相關學習表現。

四邊形的包含關係

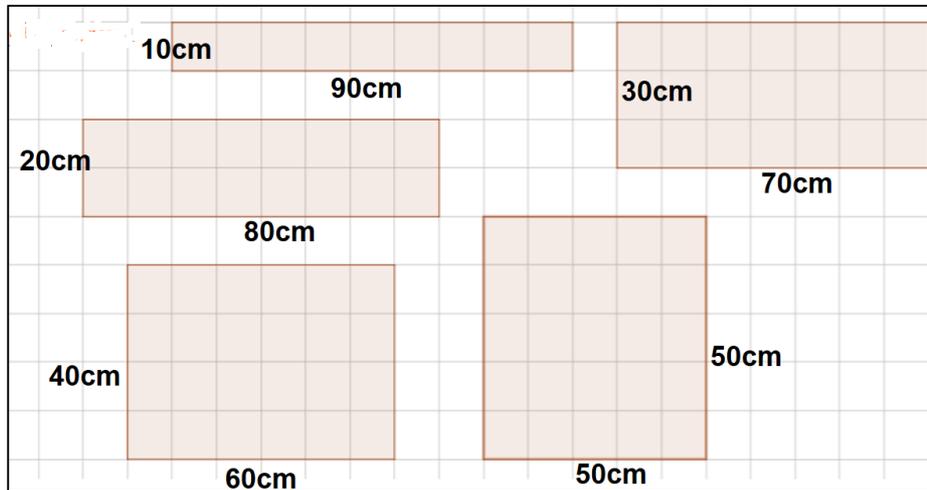
在修訂的數學課程，學生於二年級學習正方形和長方形，了解這兩個圖形的基本性質。到了三年級，便學習平行四邊形，並學習所有正方形及長方形皆為平行四邊形。到了四年級，便學習菱形，並學習正方形、長方形、菱形及平行四邊形的關係，學生要了解正方形是長方形的一種，正方形、長方形、菱形是平行四邊形的一種，以及正方形是菱形的一種。我們可以用以下圖表，歸納這四個圖形的關係。



圖一：各類四邊形的關係。A → B 代表 A 是 B 的一種。

引入包含關係的原因

包含關係會影響學生在小學其它課題的學習。舉例來說，在周界的課題，教師想學生了解，固定的周界，可以畫出不同的長方形，故請學生畫出幾個周界是 200 厘米的長方形。學生可能有以下的畫法（圖二）。



圖二：幾個周界都是 200 厘米的長方形。

學生可能會提問，邊長 50 厘米的圖形，是正方形還是長方形？這可能引來爭議。如果學生知道正方形是長方形的一種，就會減少這類爭議。在面積的課題，教師還可以問學生，周界長度是 200 厘米的長方形，哪一個面積最大？原來圖形是正方形的時候，面積最大。學生了解包含關係，教師便更容易講解這內容。

數學科的中小銜接

學生能了解四邊形的包含關係，有助他們在初中時學習數學。因為在初中，學生需要學習更多四邊形的性質，例如平行四邊形的性質，便有對邊相等、對角相等及對角線互相平分，學生了解長方形是平行四邊形的一種，便能明白長方形擁有所有平行四邊形的性質，也有長方形本身獨有的性質：對角線相等，及對角線互相平分為四條相等的線段（表一）。同理，其它四邊形之間的包含關係，也有助學生了解四邊形的性質，例如菱形也有平行四邊形的所有性質（表二）。

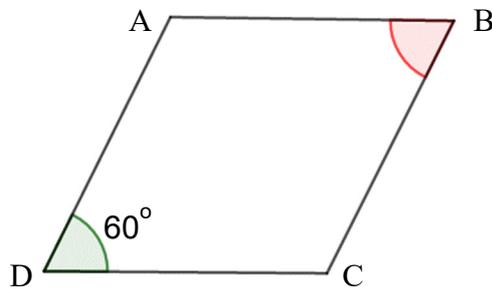
表一：初中數學課程有關長方形的性質（課程發展議會，2017b）

23. 四邊形	23.1 理解平行四邊形的性質 23.2 理解長方形、菱形和正方形的性質	13 性質包括： <ul style="list-style-type: none"> • 對邊相等、對角相等和對角線互相平分 長方形的性質包括： <ul style="list-style-type: none"> • 平行四邊形的所有性質 • 對角線相等 • 對角線互相平分為四條相等的線段
---------	---	---

表二：初中數學課程有關菱形的性質（課程發展議會，2017b）

學習單位	學習重點	時間	注釋
			菱形的性質包括： <ul style="list-style-type: none"> • 平行四邊形的所有性質 • 對角線互相垂直 • 對角線將對角平分

在初中的數學課程，用包含關係理解各類四邊形，有助學生學習演繹幾何。現嘗試舉一例子說明，給出一個菱形 ABCD（圖三），已知角 ADC 是 60° ，問角 ABC 是多少度？

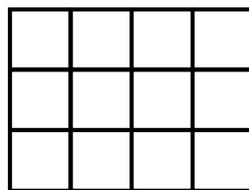


圖三：菱形求對角的問題。

由於我們知道菱形是平行四邊形的一種，而平行四邊形有對角相等的性質，所以我們就能得出角 ABC 是 60° 的結論。如果四邊形之間沒有包含關係，上述問題便難以輕易地解決。初中的數學課程，著重邏輯推理，而部份論據的基礎，就是四邊形之間有包含關係，由此可見包含關係的重要 (Clements, 2003)。在小學階段，學生不必學習圖形性質的邏輯推論，但初步了解四邊形的包含關係，相信有助他們銜接初中的數學學習。

對數學尖子的影響

以往有一部份學生在小學階段已經學習了四邊形的包含關係。小學數學比賽題目要求的數學知識，可能涉及中學的數學內容，學生課餘學習競賽類的數學，已經接觸到中學的數學內容，包括四邊形的包含關係。舉例來說，圖四由 12 個小正方形組成，題目會問圖中共有多少個長方形？



圖四：由 12 個小正方形組成的圖案。

這類競賽題，當數算圖形中的長方形數量時，通常也會計算正方形的數量，也就是說會把正方形看成是長方形的一種。故此，一部份數學尖子已經從課外活動學習了包含關係，如果教師在教學時不提及，甚至不接受四邊形的包含關係，也可能令這些學生感到困惑。新課程引入了包含關係，便能減少這方面的爭議。

四邊形性質的教學

接下來，我們先談論四邊形性質的教學，然後才討論四邊形包含關係的教學。我們在教學嘗試中，發覺學生熟習了四邊形的性質後，才能順利學習包含關係。

在小學階段，四邊形的性質，主要是兩個關於邊的性質和及一個關於角的性質。邊的第一個性質，是對邊的平行性質，指一個四邊形，其對邊有以下三種可能：沒有對邊平行、只有一組對邊平行及兩組對邊平行。邊的第二個性質有關長度，指一個四邊形其兩組對邊長度相等，或四邊長度相等。四邊形角的性質，是指四邊形的四個角是否直角。教學時，教師逐一向學生解說以上三個性質，並給予圖例，讓學生分辨圖形有哪些性質。學生在二、三年級，學習正方形、長方形及平行四邊形時，也有學習四邊形的性質，只是以往在不同課題中學習這內容，知識可能較為零碎，在四年級這個階段，教師為學生有系統地重溫，學生就能整理所學。從課堂觀察，學生學習四邊形的性質時，過程頗為順利，從學生的課業(圖五)可見學生能明白學習的內容。

上述的三個性質，適用於所有四邊形，因此教師在教學時，先著眼於讓學生熟習這三個性質，到最後才和學生討論他們常見的五類四邊形，即正方形、長方形、菱形、平行四邊形及梯形有哪些四邊形的性質，並用一個表格總結所學(圖六)。

四邊形特性 (一) 對邊平行

1) 根據對邊的平行特性，把下列圖形分類。在正確的方格加上「√」。(6%)

對邊的平行特性	A	B	C	D	E	F
沒有對邊平行						✓
只有一組對邊平行				✓		
兩組對邊平行	✓	✓	✓		✓	

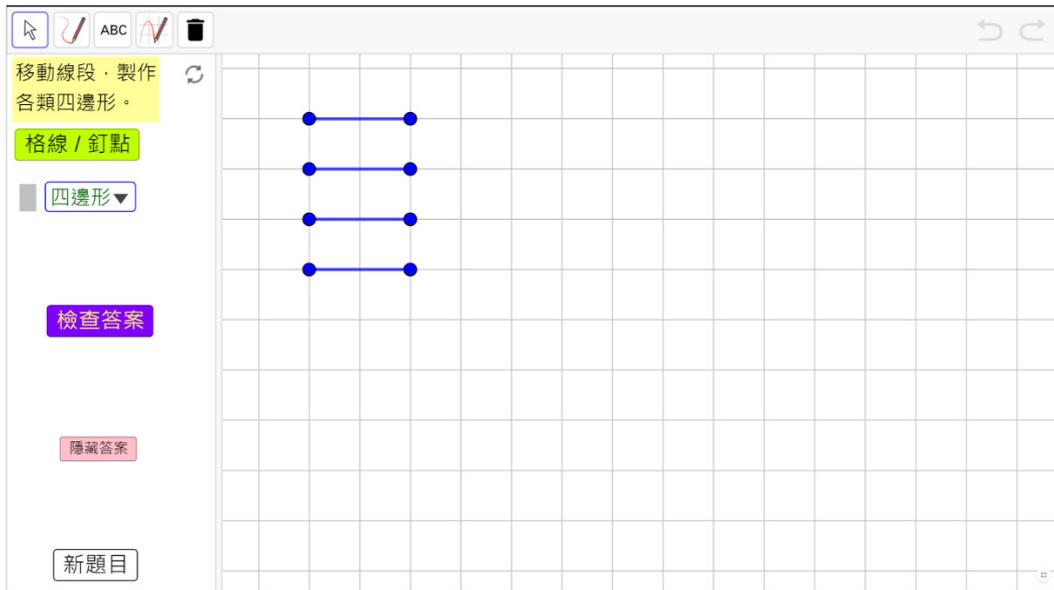
圖五：有關四邊形邊的平行性質的學生課業。

找出下列各圖形符合的特性。在正確的方格加上「○」。

特性	正方形	長方形	菱形	平行四邊形	梯形
邊					
的					
平					
行					
兩組對邊平行					
邊					
的					
兩組對邊長度					
相等					
邊					
的					
四邊長度相等					
角					
的					
四個直角					
性					

圖六：用表格歸納四邊形的性質。

為了鞏固學生對四邊形的認識，支援人員編寫了相關的 GeoGebra 課件。GeoGebra 是近年常用的數學教學軟體之一，用家能利用編程的方式製作課件，展示線段及平面圖形等幾何物件，應用廣泛，有助學生學習數學(Hohenwarter & Jones, 2007)。支援人員編寫了一個製作四邊形的 GeoGebra 課件（圖七），課件提供了四條線段，讓學生製作四邊形。學生可以選擇製作四邊形、正方形、長方形、菱形、平行四邊形或梯形，而學生完成指定的四邊形後，可以用課件提供的檢查答案功能核對答案，看看自己是否正確地製作四邊形。如果課時不夠，教師可以在課堂上向學生簡單地介紹這課件，然後請學生回家後使用課件製作四邊形，促進學生自學。學生鞏固好對四邊形性質的認識，便可以學習四邊形的包含關係。



圖七：製作各類四邊形的 GeoGebra 課件。

網址：<https://www.geogebra.org/m/gdscspms#material/t4dttuqj>

四邊形包含關係的教學

四邊形的包含關係，對學生來說，是一個很新的概念。未學習這內容前，學生一般以為各類四邊形是沒有關連的，例如他們會認為正方形不是長方形，長方形不是平行四邊形，平行四邊形也不會有直角。在備課的過程中，教師和支援人員討論方法，務求令學生在學習時更為暢順。

我們的教學流程如下：首先，我們先用容易明白的生活例子，向學生介紹包含關係；第二，我們用簡單的數學例子，引導學生學習；第三，當學生明白了圖形的包含關係，我們才正式教授四邊形的包含關係。這樣鋪展學與教，避免了在教學初期，學生還未理解包含關係時，就直接學習四邊形的包含關係（例如正方形是菱形的一種）。

首先，教師用簡單的生活例子引入包含關係，例如顯示一幅老虎的圖片，然後問學生：「這是不是老虎？」當學生回答是，就再問學生：「這是不是動物？」學生也會回答是，然後

教師便乘此契機向學生解釋。以往學生做練習，一張圖常常只會對應一個答案，但是這不是必然的。在剛提及的例子，一幅圖片對應了兩個答案，一幅圖片顯示的既是老虎，也是動物。用了生活例子來解說後，教師就轉為用數學例子，請學生討論正方形是否四邊形的一種（圖八）。

在正確的方格加上「√」。

	A	B	C	D	E
					

	A	B	C	D	E
正方形					
四邊形					

結論 圈出正確答案。

所有正方形皆是四邊形。正方形是四邊形的一種。 √ / ×

所有四邊形皆是正方形。四邊形是正方形的一種。 √ / ×

圖八：討論正方形和四邊形關係的課業。

學生很容易便理解到正方形是四邊形的一種，在 C 欄，學生應該在正方形和四邊形兩格都加上別號，同理，也應該在 E 欄的兩格都加上別號。值得一提的是，這部份不是數學課程要求的學習內容，但教師們想經由這個簡單的例子，令學生初步認識包含關係，明白一個物件可以有兩個身份，及明白句式「所有 X 皆是 Y」及「X 是 Y 的一種」的意義，這樣有助學生稍後學習較難的包含關係。

學生明白了簡單的包含關係後，就開始學習較為複雜的包含關係。教師教授正方形是菱形的一種，先在白板貼上正方形和菱形的性質，例如菱形有兩組對邊平行及四邊長度相等。經過簡單的重溫，教師就派發課業（圖九），當中顯示了三個圖形，學生要分辨它們是否菱形。

學生能分辨圖形 1 不是菱形，也知道圖形 2 是菱形，到了圖形 3，學生知道圖形四邊相等，但不確定這圖形是否菱形。這時候，教師向學生顯示一個製作四邊形的 GeoGebra 課件（圖十）。學生在課件中選了菱形後，可隨意移動線段，不論如何移動線段，課件都會顯示出一個菱形。

(一) 正方形和菱形 在表格的適當位置，加上「√」或「×」。

	例	1.	2.	3.
				
四邊長度相等	√			
是否菱形	√			

在正確方格加上「√」。

A	B	C	D	E
				

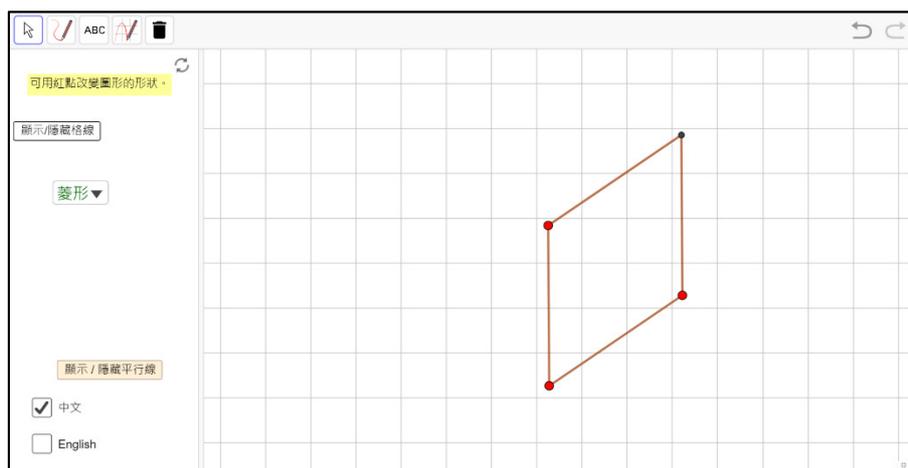
	A	B	C	D	E
正方形					
菱形					

結論 圈出正確答案。

所有正方形皆是菱形。正方形是菱形的一種。 √ / ×

所有菱形皆是正方形。菱形是正方形的一種。 √ / ×

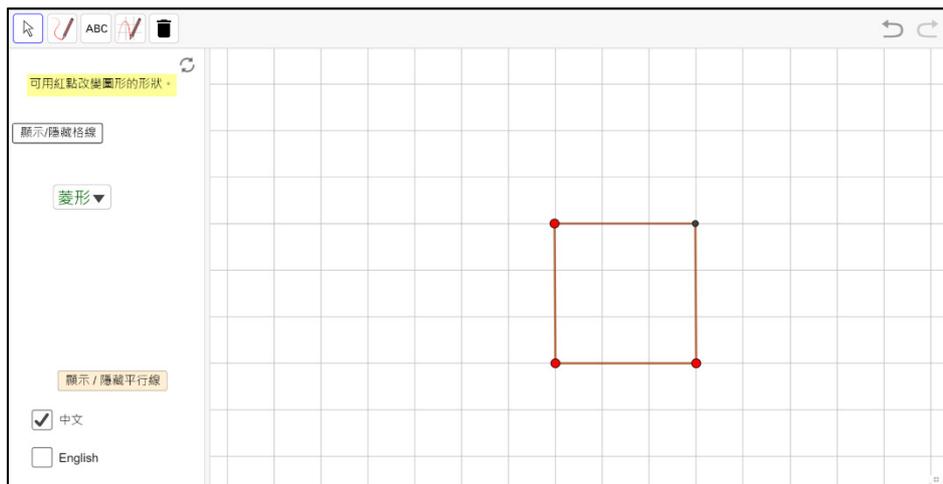
圖九：學習正方形和菱形包含關係的課業



圖十：移動線段製作四邊形的 GeoGebra 課件。

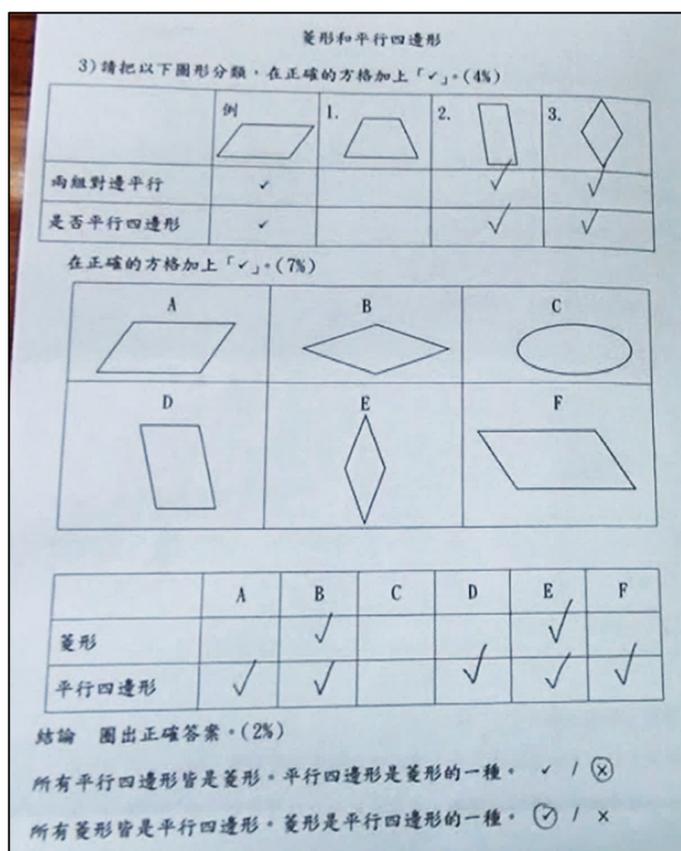
網址：<https://www.geogebra.org/m/gdscspms#material/jnstd2rm>

教師請學生嘗試移動線段，製作不同的菱形，有學生製作了正方形，會感到有點疑惑（圖十一），教師就請學生思考當中的原因，當學生仔細想想正方形和菱形所擁有的性質，加上他們之前學習正方形和四邊形的關係，漸漸地，學生就明白正方形有菱形的所有性質，故此，正方形是菱形的一種。明白了這概念，教師就請學生繼續完成圖八的課業，學生能夠在 B 欄和 E 欄的兩格，都加上別號。至此，學生就完成了正方形是菱形的包含關係的學習。



圖十一：用製作菱形的 GeoGebra 課件製作了正方形。

我們用相同的課業設計及教學方法，教授其它四邊形的包含關係。例如，在教授菱形和平行四邊形的包含關係時，教師也請學生分辨圖形是否菱形和平行四邊形，並用 GeoGebra 課件解說。由課堂觀察及學生課業(圖十二)所見，學生的學習也很順利。



圖十二：菱形和平行四邊形包含關係的學生課業。

學生一下子學習了幾個四邊形的包含關係，為了幫助學生鞏固所學，教師在這節課的完

結部分，設計協助學生總結所學的課業，給出了正方形、長方形、菱形、平行四邊形及梯形的圖像，請學生填寫配合圖例的名稱，並指出各圖有哪幾個不同的身份（圖十三），學生經此總結，就更加明白各類四邊形的關係。

總結					
在適當的方格，填上圖形名稱，或加上「√」。					
					
它的名稱					
它是不是正方形?					
它是不是菱形?					
它是不是長方形?					
它是不是 平行四邊形?					
它是不是梯形?					

圖十三：總結四邊形包含關係的課業。

總結經驗

是次教學，教師運用了四種教學策略，包括：第一，鞏固基礎知識，重溫四邊形邊和角的性質，認識四邊形的邊的平行性質、邊的長度性質及角是否直角的性質。第二，教師用了由淺入深的方法介紹包含關係，教師加入了新的教學內容，讓學生認識所有老虎皆是動物，及所有正方形皆是四邊形，令學生容易明白包含關係的意思。第三，學生面對大量描述數學內容的文字，可能感到沉悶，或覺得難以理解，教師在教學中用了很多圖例輔助，這樣學生就不必只是閱讀有關包含關係或四邊形性質的句子。第四，教師用了電子工具輔助教學，電子工具能快速顯示很多例子，而學生使用電子工具學習，通常也會覺得新鮮和有趣。

本個案的四年級學生在初小的時候學習舊課程，部份學生已經有一些先入為主的觀念，以為正方形不是長方形，平行四邊形不會有直角。當他們初初學習四邊形的包含關係時，會感到困惑，但當他們細閱各類圖形的特性，發現正方形擁有長方形的所有特性，然後又發現，在GeoGebra 製作長方形的課件內，可以製作正方形，他們就漸漸明白不同圖形是有關係的。

教師有時也遇到以下情況，學生在課堂上能正確回答問題，顯示他們了解包含關係，但學生的功課卻答錯了，待教師詢問學生原因後，才發現學生家長用舊的觀念教授學生，要學生「改正」，因此學生反而答錯了。因此，學校也可以從家長教育著手改進學生學習。除了上述提及的少許阻礙，由觀課所見，學生學習大致暢順，學生在課後練習的表現也理想，評估時，學生的表現也不俗。總括而言，學生的學習表現是令人滿意的。

參考文獻

1. Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.). *Research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 15 - 78). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
2. Hohenwarter, M. & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: The case of GeoGebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27, 126 - 131.
3. 課程發展議會(2017a)。《**數學教育學習領域課程指引補充文件(小學數學科學習內容)**》。取自：https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/pmc2017_tc.pdf
4. 課程發展議會(2017b)。《**數學教育學習領域課程指引補充文件(初中數學科學習內容)**》。取自：https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/jsmc2017_tc.pdf