題目：二年級基本除法教學分享

講者：陳鋼博士（教育局 小學校本課程發展組）
簡頌詩老師 何志明老師（聖博德學校）

引言

除法是四則運算中不可或缺的一部分。在香港，學生在二年級下學期開始學習除法（香港課程發展議會，2017）。聖博德學校在上學年參加了校本支援計劃，並在除法教學方面編寫了學習冊、設計了分物活動、引入了 GeoGebra 電子教學工具，以及編寫了具特色的應用題練習。本文將介紹該校在除法教學方面的經驗，以供業界教師參考。

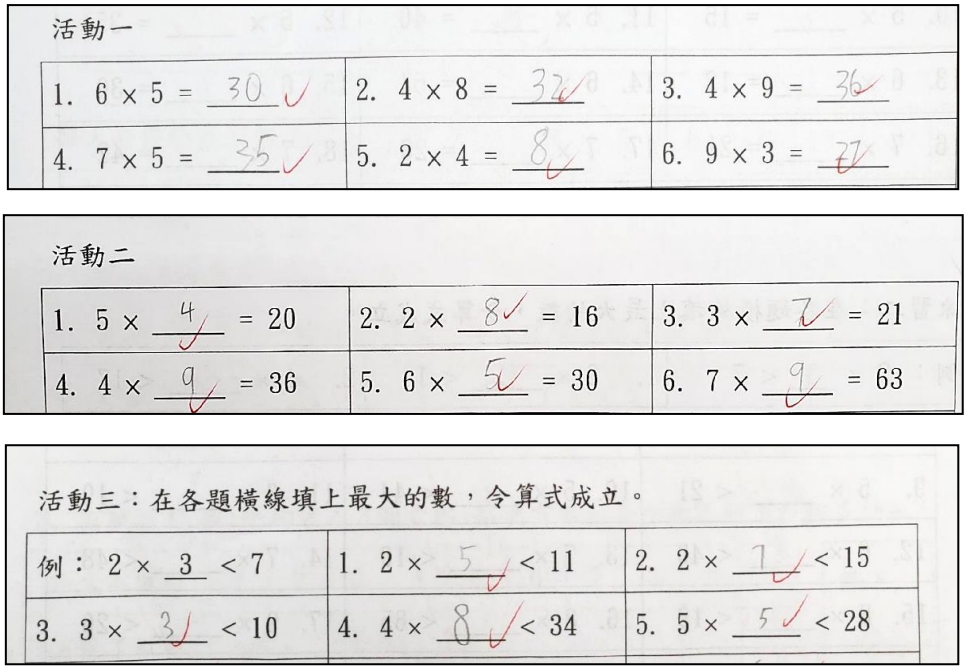
除法教學簡介

首先，讓我們回顧除法教學的基本概念和一般教學流程。除法的概念主要包括均分和包含兩種形式（教育局課程發展處數學教育組，2018）。均分形式的分物問題是在已知物件總數和要均分的份數時，求每份的物件數量。例如，將 6 個球平均分配到 3 個箱子中，每個箱子裡有多少個球。另一方面，包含形式的分物問題是在已知物件總數和每份的物件數量時，求需要多少份。例如，有 6 個球，每 3 個球裝入一個袋子，需要多少個袋子。在完成分物活動後，教師會引入除法算式，使學生能夠運用計算方法解題，而不是每次都依賴分物方法尋求答案。這樣可以提高解題效率。

了解基本除法的一般教學流程後，就讓我們詳細介紹本次教學的嘗試。這次教學可以概括為以下四個部分：重溫先備知識及延伸學習；教授均分概念的分物和計算；教授包含概念的分物和計算；以及鞏固應用題教學。

重溫先備知識及延伸學習

為了讓學生能夠順利學習除法，需要先讓他們熟悉乘法的計算。因此教師在教學前，會先為學生複習基本乘法的計算，包括背誦乘數表等。除此之外，教師還會提供其他類型的問題，以刺激學生思考。這些問題分為三類，第一類是求兩數相乘的積，例如 $2\times3=____$ ，測試學生對基本乘法知識的掌握程度；第二類是求乘法算式中的乘數，例如 $2\times\ ___=6$ ，有助於學生將來學習沒有餘數的除法計算；第三類是求滿足一道算式的最大整數，例如 $2\times\ ____<7$，有助於學生將來學習有餘數的除法計算。或許有些讀者會對第三類問題感到疑惑，認為學生不一定能夠理解。然而，在新的數學課程中，學生已經學習了不等式符號，因此對於這些符號不會感到陌生。此外，教師也會用實例輔助解釋，例如先提供 2 乘以 2 等於 4 小於 7，2 乘以 3 等於 6 也小於 7，2 乘以 4 等於 8 就大於 7，因此答案是 3。這樣一來，學生就能夠理解這類問題了。從學生的課業（圖一）中可以看出，他們已經掌握了這些內容。



活動一

1. 6 × 5 = 30	2. 4 × 8 = 32	3. 4 × 9 = 36
4. 7 × 5 = 35	5. 2 × 4 = 8	6. 9 × 3 = 27

活動二

1. 5 × 4 = 20	2. 2 × 8 = 16	3. 3 × 7 = 21
4. 4 × 9 = 36	5. 6 × 5 = 30	6. 7 × 9 = 63

活動三：在各題橫線填上最大的數，令算式成立。

例： 2 × 3 < 7	1. 2 × 5 < 11	2. 2 × 7 < 15
3. 3 × 3 < 10	4. 4 × 8 < 34	5. 5 × 5 < 28

圖一：有關乘法知識的學生課業

現階段學生未理解除法，所以之前的活動僅當作數學趣味問題來求解，並未涉及到被除數和除數等數學詞彙。

均分概念的分物和除法計算

重溫完乘法的知識，就開始進行均分概念的教學。此教學可以分為三個步驟：分物活動、填寫數字的表格記錄、以及除法計算。

分物活動

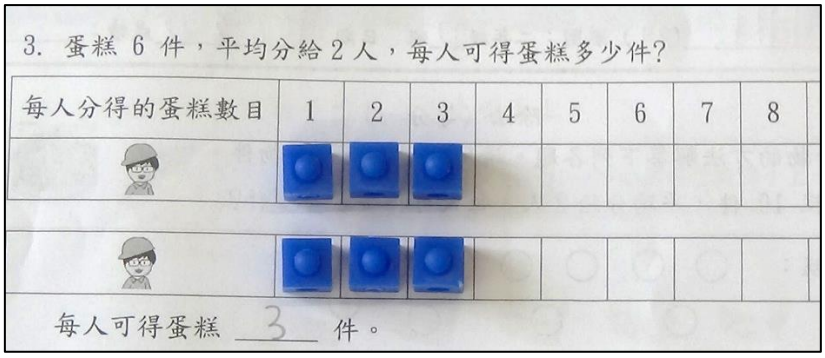
在進行均分的分物活動時，可以統一使用數粒來代表分物。一般問題的形式為「有若干件蛋糕，要平均分給若干個人，每人可得到幾件蛋糕？」教師可以為學生設計一個表格，方便學生記錄分物活動。例如圖二中的問題，共有六件蛋糕，要平均分配給兩個人，學生可以使用數粒來代表蛋糕，將數粒平均分配給兩個人，放入適當的格子中，就完成了分物活動。圖三顯示了學生完成練習後的情況。

3. 蛋糕 6 件，平均分給 2 人，每人可得蛋糕多少件?

每人分得的蛋糕數目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

每人可得蛋糕 _____ 件。

圖二：有關均分分物的活動題



圖三：學生完成題目的情況

學生做了沒有餘數的分物後，就做有餘數的分物活動。活動的表格會加多一格，讓學生擺放剩餘的數粒(圖四)。

圖四：有餘數的均分分物的活動題

為節省時間，活動不必一定要實物操作，而是用畫圓圈的方式完成活動。圖五就顯示了一個例子，學生於方格內畫圓圈，一個圓圈代表一件蛋糕，未能夠均分的蛋糕，就畫在剩餘蛋糕的位置。

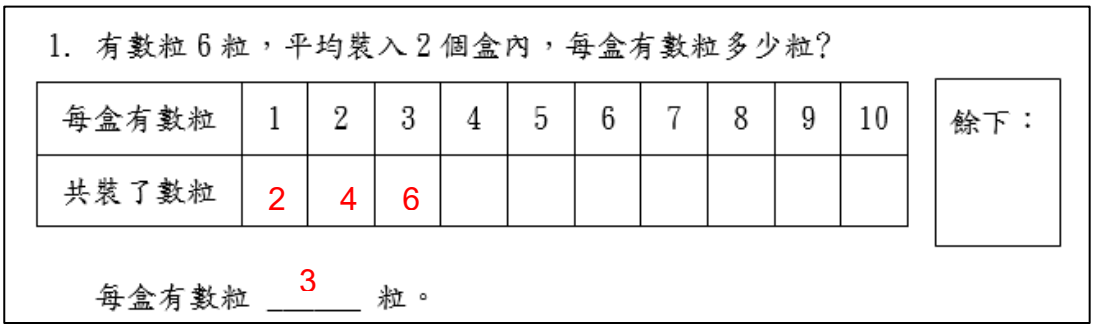
圖五：學生畫圓圈完成分物練習

這做法也回應了 C-P-A 教學模式所建議的教學進程。 C-P-A 是 Concrete (具體)-Pictorial (圖像) - Abstract (抽象) 的簡稱，此理論建議教學由具體開始，繼而轉化到用圖像，最後再由抽象的數學符號取代圖像 (Leong, Ho, & Cheng 2015; Chang, Lee, & Koay

2017)。剛才的活動，顯示了學生由實物（數粒分物）到圖像（畫圓圈）解題的進程。

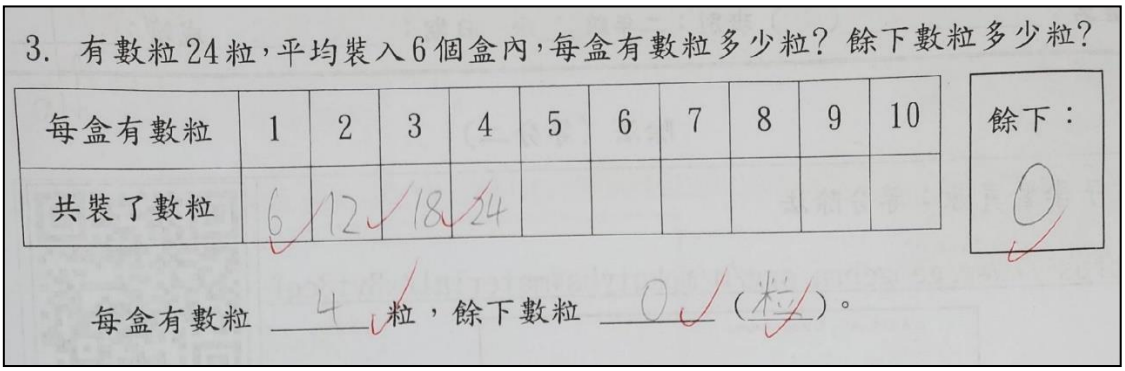
填寫數字的表格記錄

接下來的教學，課業設計稍有改動（圖六）。表格第一列仍舊表示「每盒有數粒」幾多粒，第二列則表示「共裝了數粒」幾多粒。學生也不是畫圓圈，而是改為寫數字。用圖五的問題來說明第二列學生需要填上什麼數字：2 代表第一次分物後，共裝了兩粒，4 代表第二次分物後，共裝了 4 粒，6 代表第三次分物後，共裝了 6 粒。



圖六：填寫數字的分物練習

這個填寫表格的活動，是由分物活動演變而來，所以學生不會覺得問題難以理解。圖七顯示了一個學生課業。



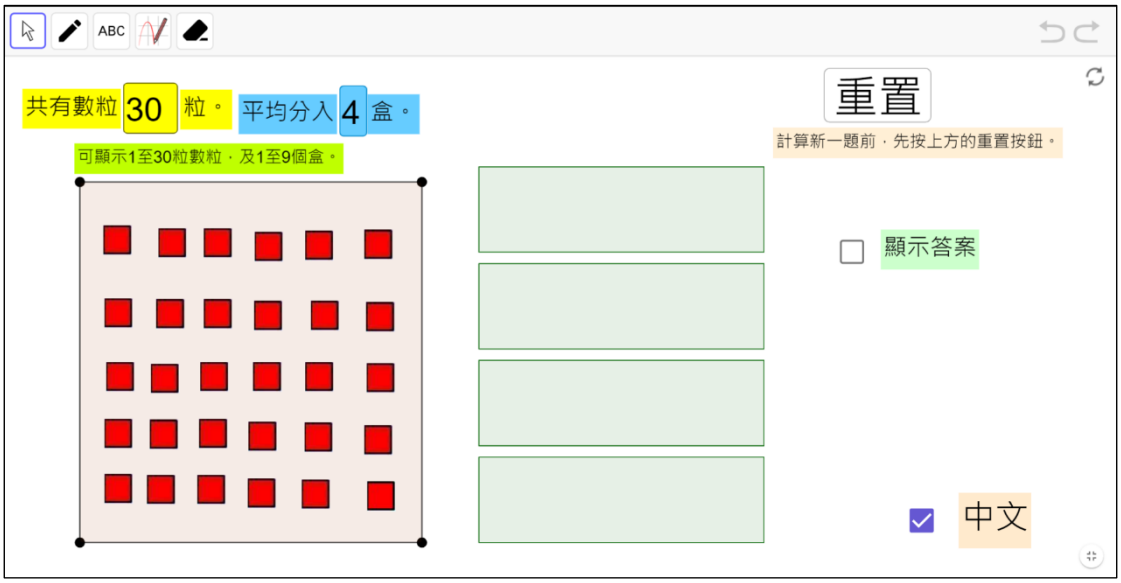
圖七：學生填寫數字完成分物練習

為了協助學生更好地學習分物活動，支援人員編寫了一個模擬分物活動的 GeoGebra 課件，如圖八所示。這是一個包含兩個課件的 GeoGebra 繪本，一個用於均分的分物活動，另一個用於包含的分物活動。

在第一個課件中，黃色的方格可以輸入數字，該數字用於控制數粒的數量，最少 1 粒，最多 30 粒。為了避免數量過多，影響學生的分物活動體驗，課件限制了最多顯示 30 粒數粒。藍色方格的數字是用於控制盒的數量，最少 1 盒，最多 9 盒。完成分派數粒後，學生可以按下「顯示答案」按鈕，課件就會顯示正確分物的結果。在開始新的分物活動之前，建議先按下「重置」按鈕，還原數粒的排列，然後才輸入數字。用家可以按右下角的按鈕來放大畫面。此外，

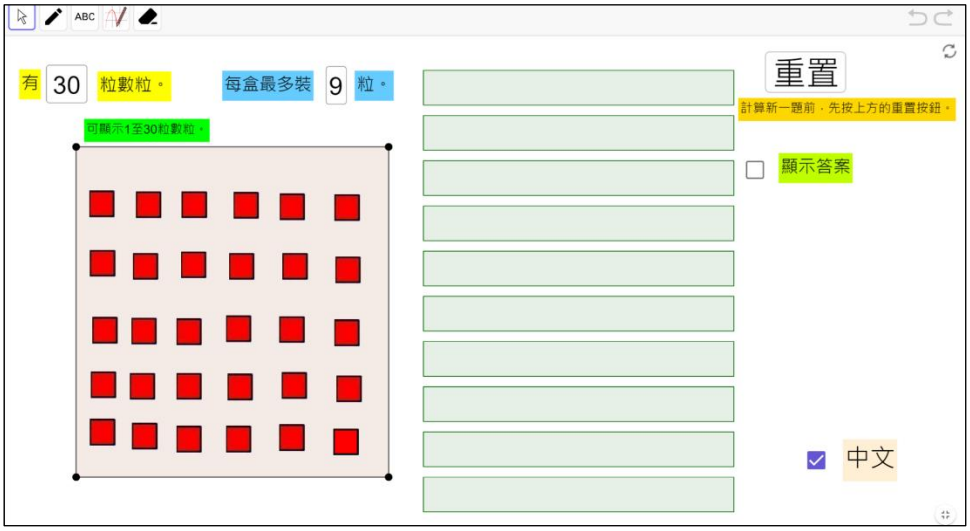
課件還可以用中文或英文顯示。

這個課件可以讓學生更生動地學習分物活動，並且可以讓他們更好地掌握均分概念。通過使用這個課件，學生可以更輕鬆地進行分物活動，並且可以更快地得到正確的答案。



圖八：模擬均分分物活動的 GeoGebra 課件及其二維碼
網址：https://www.geogebra.org/m/mpkqtybs

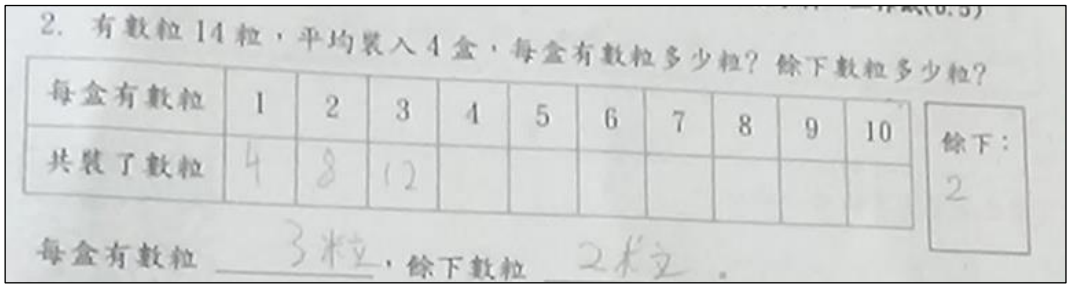
用家可以用書簽頁去第二個課件（圖九），這個課件和第一個課件相似，可以用於包含形式的分物活動。黃色方格同樣代表數粒的數目，藍色方格的數字控制每盒裝幾多數粒，如果輸入數輸入大一點的數字，盒就會長一點，代表可以多裝一些數粒。其餘操作與第一個課件相同。



圖九：模擬包含分物活動的 GeoGebra 課件

讓我們回到圖七的問題。在回答這道問題之前，學生可以使用圖八的 GeoGebra 課件模擬分物活動，並觀察數粒的變化，然後再完成這道題。學生需要填寫的數字，正好對應分物活動

時，裝入盒內數粒的總數。例如，當每盒裝了 1 粒數粒，6 個盒子內就共有 6 粒數粒；每盒裝有 2 粒數粒，6 個盒子內就共有 12 粒數粒，餘此類推。最後，每盒裝有 4 粒數粒，6 個盒子內就共有 24 粒數粒。學生觀察數字的規律時，會發現所填寫的數字都是 6 的倍數。原來，將 24 粒數粒平均裝入 6 個盒子，就是要找到一個數字，該數字乘以 6 最接近 24 但不能大於 24。學生理解了這一點後，學習除法直式時就會更容易理解其運作原理。



圖十：學生填寫數字完成有餘數的分物練習

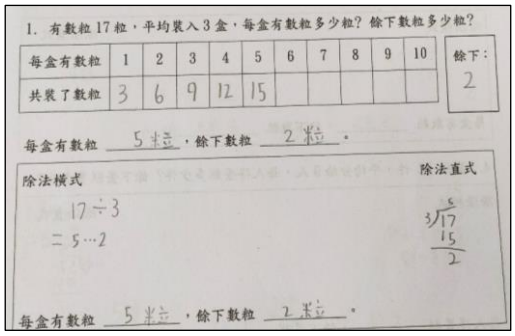
圖十展示了一位學生如何回答有餘數的分物問題。學生能夠發現，在每盒裝了 3 粒數粒後，已經分了 12 粒數粒，不能再分，剩下 2 粒數粒。學生觀察數字的變化，逐漸發現表格中的 4 是 4 乘以 1 的結果，8 是 4 乘以 2 的結果，12 是由 4 乘以 3 得來。在解決這類問題時，如果學生直接寫出 12 而不寫 4 和 8，也應該獲接受。畢竟，這只是一個過渡的活動，最重要的是學生明白寫出這些數字的原理。

學生在開始進行這類問題時，可能需要使用 GeoGebra 。當他們理解了問題的原理，即使不使用課件輔助，也能夠理解如何填寫表格中的數字，因此不必強制學生一定要使用電子課件。此外，這類填寫數字的活動，顯示了學生由使用圖像（畫圓圈）解決問題，進而轉變為使用抽象符號（填寫表格中的數字）解決問題，符合 C-P-A 教學模式中由 P（圖像）到 A（抽象符號）的階段。

除法計算

完成了分物活動和填寫表格的訓練，學生已經對於除法有了初步的認識，因此教師介紹除法計算時，變得相對簡單。圖十一展示了一個例子，一開始學生仍然是透過填寫表格的方式來解決問題「數粒 17 粒，平均裝入 3 個盒，每盒有數粒多少粒？」。接著，教師向學生解釋，數學家想利用更聰明、更簡單的方式來解決問題，而不是每次都要填表格，因此他們發明了一個簡單的表達方法，即除法。接下來，教師可以介紹除法的橫式、直式，以及相關的專有名詞：被除數、除數、商和餘數。

教師也可以進一步解釋除法直式中的各個數字，以及這些數字與填寫表格內的數字之間的關係。繼續以圖十一為例，直式中的數字 17 代表有 17 粒數粒需要分配，3 代表 3 個盒子，5 代表每個盒子分到 5 粒數粒，數字 15 代表共分配了 15 粒數粒。最後，數字 2 是由 17 減去 15 得到的，代表餘下的數粒數量。這樣的解釋有助學生深入地理解除法直式的運作原理。


1. 有數粒 17 粒，平均裝入 3 盒，每盒有數粒多少粒？餘下數粒多少粒？

每盒有數粒	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	餘下：
共裝了數粒	3	6	9	12	15						2

每盒有數粒 5 粒，餘下數粒 2 粒。

除法橫式

17÷3
=5…2

除法直式

5
3)17
15
2

每盒有數粒 5 粒，餘下數粒 2 粒。

圖十一：學生由表格過渡至學習除法

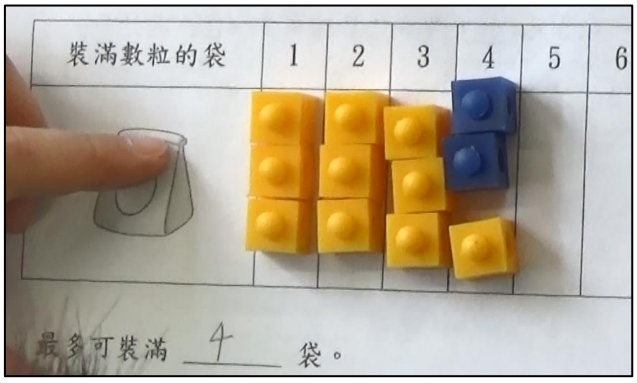
簡介過後，教師就可以直接請學生做課本的計算練習。多數學生可以輕鬆地完成這些練習，並逐漸掌握除法的計算方法。很快地，學生就不必填寫表格了，畢竟填寫表格只是一個過渡的活動。之後，學生就直接用除法直式計算。

此外，學生由分物活動開始，都是從應用題的情境中學習，因此在現階段，教師不必額外教授應用題，學生已經能夠解決基本的應用題。

包含概念的分物和除法計算

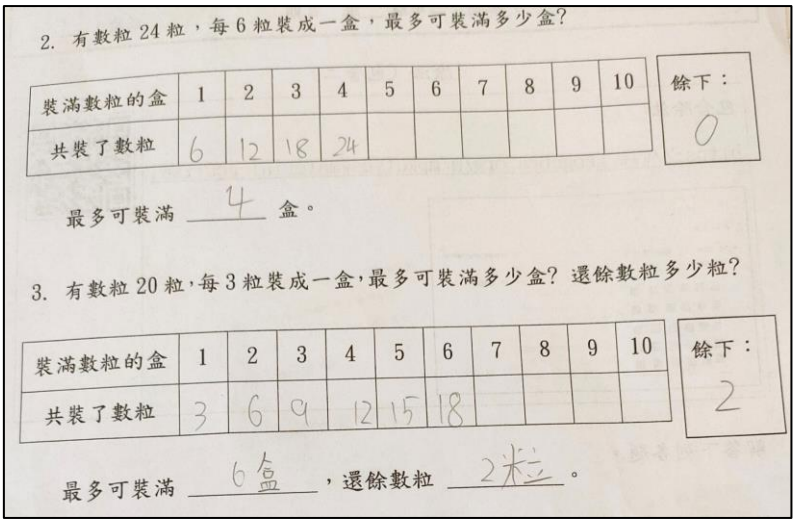
之前提到的教學過程，全部都是均分的情境。如此一來，教師可以一氣呵成教授由分物活動引出表格記錄，最後帶出除法計算。接下來，就是包含除法的教學。讓學生經歷包含情境的分物、表格記錄、除法計算及應用題。由於學生已經有均分除法的學習經驗，學習包含除法，經歷相似的步驟，學生也容易掌握。故此，教師可以加快教學節奏。

一開始，教學也是先讓學生做包含除法的分物活動。圖十二顯示了一道這類的活動題。問題是 12 粒數粒，每 3 粒裝成一袋，最多可裝滿多少袋?



圖十二：有關均分分物的活動題

學生做了一些分物的問題，就可以改為填寫表格，如圖十三。



2. 有數粒 24 粒，每 6 粒裝成一盒，最多可裝滿多少盒？

裝滿數粒的盒	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	餘下：
共裝了數粒	6	12	18	24							0

最多可裝滿 4 盒。

3. 有數粒 20 粒，每 3 粒裝成一盒，最多可裝滿多少盒？還餘數粒多少粒？

裝滿數粒的盒	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	餘下：
共裝了數粒	3	6	9	12	15	18					2

最多可裝滿 6盒，還餘數粒 2粒。

圖十三：有關包含分物填寫表格的問題

然後，就已經可以過渡至一般的除法計算及包含情境的應用題。此處就不詳述。

鞏固應用題

到了最後的教學階段，教師再次為學生鞏固應用題的學習，大致分為兩類：一般的應用題及餘數處理的應用題。

一般應用題

學生有一個習慣，剛剛學完一種知識，就只是懂得用該知識解題。例如學完除法，解應用題的時候，就只是用除法，而且必定是用題目中較大的數字除以較小的數字。學生雖然能夠完成練習，但未必培養到小心審題的習慣。學校設計校本課業的時候，加入了四個特色元素，務求課業能夠幫助學生更好地解題（圖十四）。

首先，課業的練習不僅限於除法應用題，還包含加法、減法和乘法應用題，期望能夠訓練學生認真審題。其次，學生只需要列寫應用題的橫式，不必計算，因為計算的練習已經在之前完成了。這樣做的目的是節省學生計算和書寫答案的時間，讓教學更加專注於理解應用題的意思。第三個特色，是題目故意漏寫了一些數字。有時學生太乖了，想快點完成練習，老師要求做第三題，有些學生已經做到第八題。為了讓學生做練習的步伐不致相差太遠，課業故意留空某些數字，以防止學生偷步完成練習。做到某道問題，教師才說出欠缺的數字，學生才能夠繼續解題。

加、減、乘和除應用題

考一考:為下列各題列寫正確的算式。

	題目	列式
1.	3 人合資買了一輛 _____ 元的玩具車，每人平均應付多少元?	
2.	小明早上用去 38 元，下午用去 4 元。他共用去多少元?	
3.	6 人分 _____ 塊餅，每人應得餅多少塊?	
4.	一個菜肉包售 9 元， _____ 元可以買菜肉包多少個?	
5.	每份報紙售 8 元，便利店共賣出報紙後，共得 _____ 元。便利店賣出報紙多少份?	
6.	乒乓球一盒有 6 個,老師買 30 盒可得乒乓球多少個?	
7.	乒乓球一盒有 6 個，小明想買 30 個乒乓球，他應該買乒乓球多少盒?	
8.	王老師買了 6 盒乒乓球，共得乒乓球 30 個。每盒有乒乓球多少個?	

圖十四 校本四則運算應用題課業

最後一個特色，是運用了變易理論（Lo 2012; Marton 2015）來編寫題目。簡單來說，就是用相似的情境編寫數學問題，並且只是改變各題關鍵的訊息。例如這份課業的第六至第八題(圖十四)，都是講述買了幾多盒或幾多個乒乓球，學生需要仔細看題目，認真分辨各個句子陳述的意思及各項數據的意義，然後才能夠解題。這類問題迫使學生從相同中找出不同，嘗試訓練學生審題的能力。另外補充一點，課業的第六題是乘法的問題，二年級學生未學兩位數乘以一位數的乘法計算，但是這類練習只需要學生列寫算式，學生只要能夠理解用乘法解題，也是有能力列出正確的算式。

應用題中的餘數

有些應用題，需要學生留意除法計算的餘數，是較為高階的問題。例如「有 22 件蛋糕，每 4 件裝成一盒，最少需要多少盒？」學生解這一題，用 22 除以 4，算得商是 5，餘數是 2。

但學生還需理解，要再用一個盒子來裝餘下的 2 件蛋糕。為了引導學生逐步理解，教師可以提出以下問題：有 4 件蛋糕，每 4 件裝成一盒，最少需要多少盒？如果改為 8 件蛋糕，那麼最少需要多少盒？如果是 12 件蛋糕呢？20 件呢？21 件呢？22 件呢？教學時可以配合上文提及的 GeoGebra 課件（圖九），一邊分物，一邊講解。如果時間足夠，教師可以設計一個分組活動，讓學生自己嘗試解題。學生觀察圖像後，會明白有 22 件蛋糕，最少是要用 6 個盒來裝蛋糕的。然後，教師用除法解說，讓學生更容易理解為什麼答案是商加上 1。這類應用題較難，如果學生未能掌握，不妨留待三年級，學生閱讀能力提升後，再為他們鞏固所學。

總結經驗

學校在教授除法時，採用了自行設計的課業作為主要教材。教學流程包括重溫及鞏固乘法的知識，進行分物活動並要求學生整齊排列被分的物件，接著讓學生填寫表格以理解試商的過程，最後過渡到普通的除法計算及應用題。在教學過程中，也加入了電子學習元素以增加學習趣味。

觀課所見及教師的描述顯示，整體教學過程順利，學生能夠學懂除法計算，也明白直式操作背後的原理。學生的課業及考評表現也顯示，他們能夠掌握學習內容。

以上的教學策略及流程供參考。學校教師可以因應校情作出調整。例如，學校正在推動電子學習，可以嘗試採用電子數粒教學。此外，分物活動及填寫表格練習的題數，教師也應該因應校情作出調整。

參考文獻

1. Chang, Suo Hui; Lee, Ngan Hoe; Koay, Phong Lee (2017). Teaching and learning with concrete-pictorial-abstract sequence: A proposed model. *The Mathematics Educator*, 17, 1 - 28.

2. Leong, Yew Hoong; Ho, Weng Kin; Cheng Lu Pien (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its Origins and Charting its Future. *The Mathematics Educator, 16*, 1 - 18.

3. Lo, Mun Ling (2012). *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning*. Göteborg, Sweden: Acta Universitatis Gothoburgensis.

4. Marton, Ference (2015). *Necessary conditions of learning*. New York: Routledge.

5. 香港課程發展議會(2017)。數學教育學習領域課程指引補充文件(小學數學科學習內容)。取自：https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/pmc2017_tc.pdf

6. 教育局課程發展處數學教育組(2018)。小學數學課程闡釋(第一學習階段)。取自：chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/curr/EN_KS1_tc.pdf