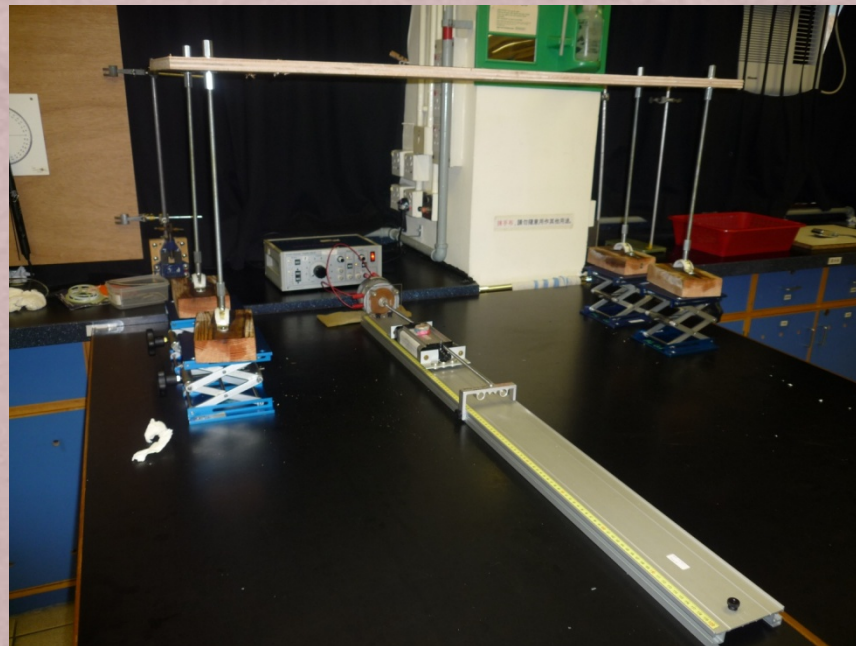


To investigate the frequency response of a spring-mass system  
under different damping factor

CHU Ho Yin  
WU Chun Hong  
YU Cheuk Fung



# 目的

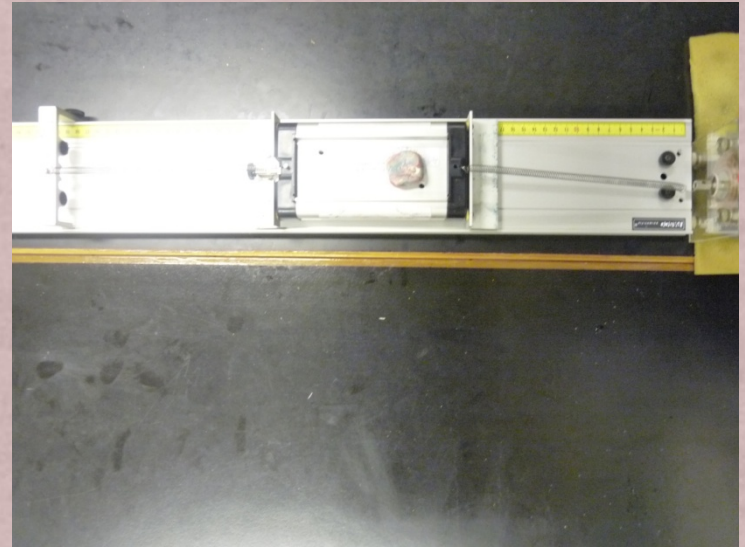
將外力施加於一個振動系統，如這個外加的頻率是與彈簧的自然頻率相同，振幅便會變得最大，而此情況下則稱為共鳴。另外，在共鳴時，如阻尼越大，其頻率便會越小。

這些理論都是出自書本中，但是在現實的情況之下，不知是否合乎書內的內容，於是我們便利用一個實驗來證明書的理論是否與現實相符。



# 原理

- 找出彈簧的自然頻率
- 用不同的頻率令車子振動，並找出其振幅
- 另外量度在不同阻尼之下的振幅
- 如果外加頻率與自然頻率相同會有最大振幅及在較大阻尼時，振幅會變小，則代表理論符合現實



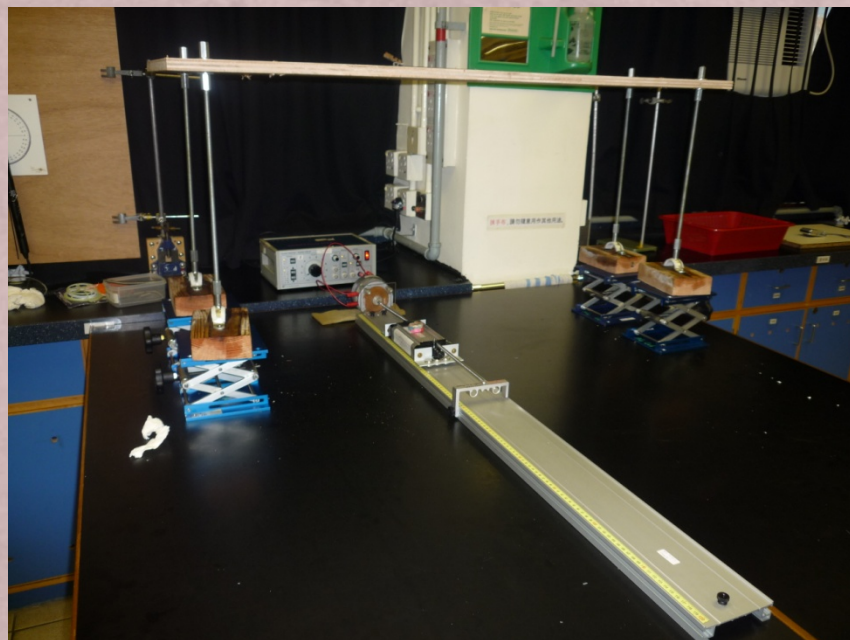
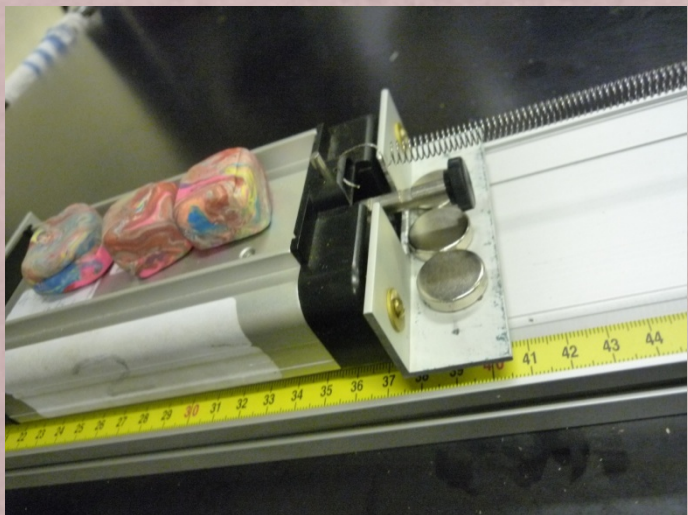
# 步驟

1. 在車子兩邊連接彈簧。
2. 移動一定距離並放開車子，開始震動。
3. 拍下車子運動情況，用HDMVA找出車子在不同時間的位置，再用EXCEL繪製圖表，並找出其自然頻率及阻尼系數。
4. 分別用1對，2對，3對磁鐵放在車子上，並改變其阻尼系數，重覆步驟2-3。
5. 將其中一條彈簧連接到震動器。
6. 調節其震動頻率。



# 步驟

7. 拍下車子運動情況，用HDMVA找出車子在不同時間的位置，再用EXCEL繪製圖表，找出其振幅。
8. 分別用1對，2對，3對磁鐵放在車子上，並改變其阻尼系數，重覆步驟6-7。
9. 將結果繪製成圖表。

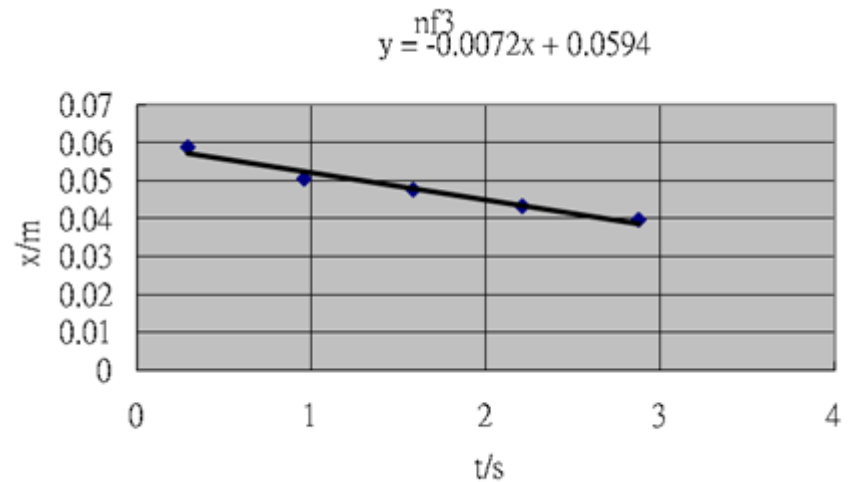
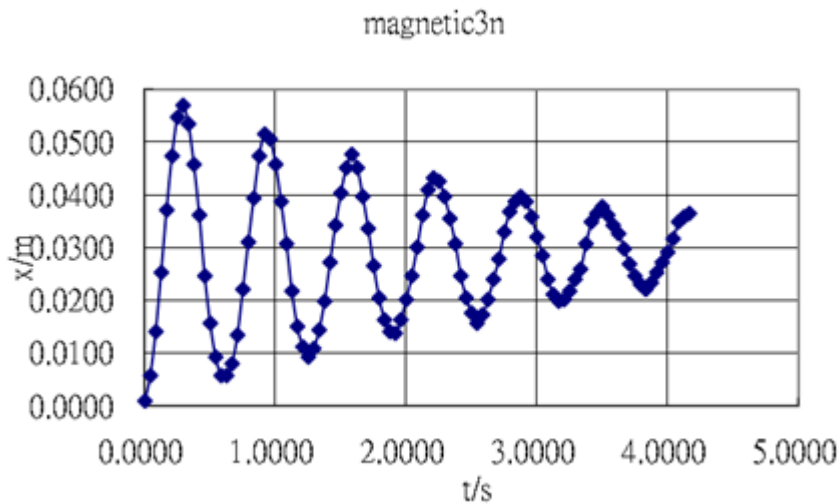


## 步驟

10. 利用公式計算出不同阻尼系數及頻率下車子的振幅，將計算結果繪成圖表。
11. 比較實驗及計算得出的結果，若兩者結果相近，便能證明實驗與理論相符。

# 實驗結果

|            | 0 磁鐵   | 1 對磁鐵  | 2 對磁鐵  | 3 對磁鐵  |
|------------|--------|--------|--------|--------|
| 系統自然頻率 /Hz | 1.49   | 1.49   | 1.49   | 1.49   |
| 阻尼系數 s-1   | 0.0634 | 0.0846 | 0.1142 | 0.1479 |



以3對磁鐵的結果為例:

頂點斜率

= 阻尼系數

=  $0.1479s^{-1}$

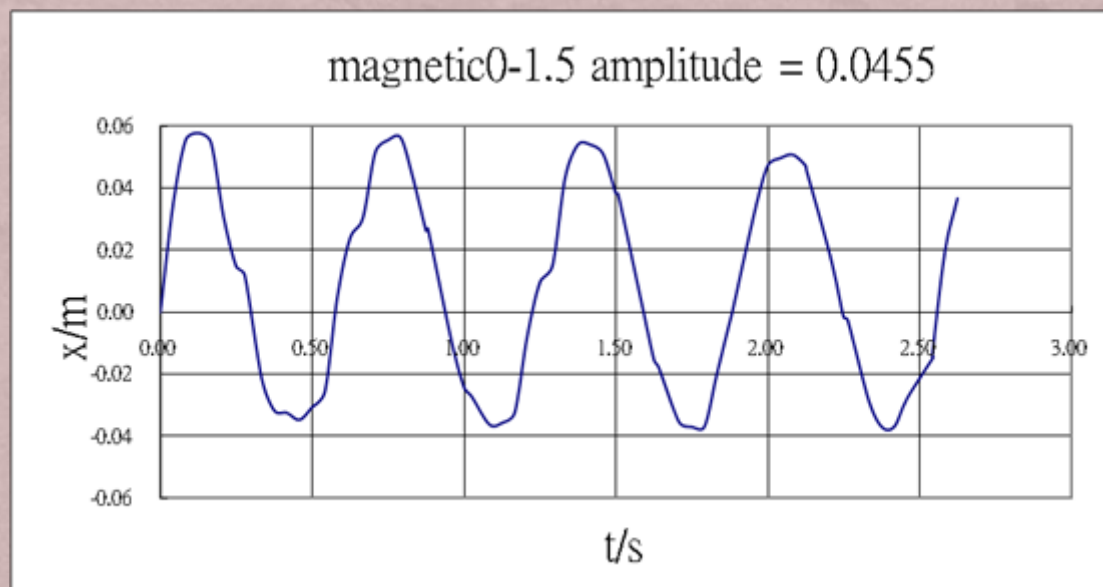
自然頻率: 1.49Hz



# 在不同頻率及阻尼系數下車子的振幅

| 0對磁鐵        |      |      |      |     |      |      |      |
|-------------|------|------|------|-----|------|------|------|
| 震動器施與的頻率/Hz | 1.2  | 1.3  | 1.4  | 1.5 | 1.6  | 1.7  | 1.8  |
| 震幅 /cm      | 0.58 | 0.77 | 0.85 | 4.6 | 1.72 | 1.14 | 0.59 |

自然頻率:1.49Hz  
在無磁鐵情況下，  
當震動器施與的頻率(1.5Hz)接近自然  
頻率，振幅便會明  
顯增大。





| 1對磁鐵        |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|
| 震動器施與的頻率/Hz | 1.2  | 1.3  | 1.4  | 1.5  | 1.6  | 1.7  | 1.8  |
| 震幅 /cm      | 0.51 | 0.67 | 0.82 | 2.3  | 2.0  | 0.82 | 0.49 |
| 2對磁鐵        |      |      |      |      |      |      |      |
| 震動器施與的頻率/Hz | 1.2  | 1.3  | 1.4  | 1.5  | 1.6  | 1.7  | 1.8  |
| 震幅 /cm      | 0.48 | 0.86 | 0.82 | 1.38 | 1.00 | 0.64 | 0.57 |
| 3對磁鐵        |      |      |      |      |      |      |      |
| 震動器施與的頻率/Hz | 1.2  | 1.3  | 1.4  | 1.5  | 1.6  | 1.7  | 1.8  |
| 震幅 /cm      | 0.42 | 0.65 | 0.77 | 0.78 | 0.72 | 0.63 | 0.37 |

在1對,2對,3對磁鐵的情況下都相同。當震動器施與的頻率(1.5Hz)接近自然頻率，振幅便會明顯增大。若在同一頻率下，愈多的磁鐵時(阻尼系數愈大)振幅會變得愈小。

# 結果

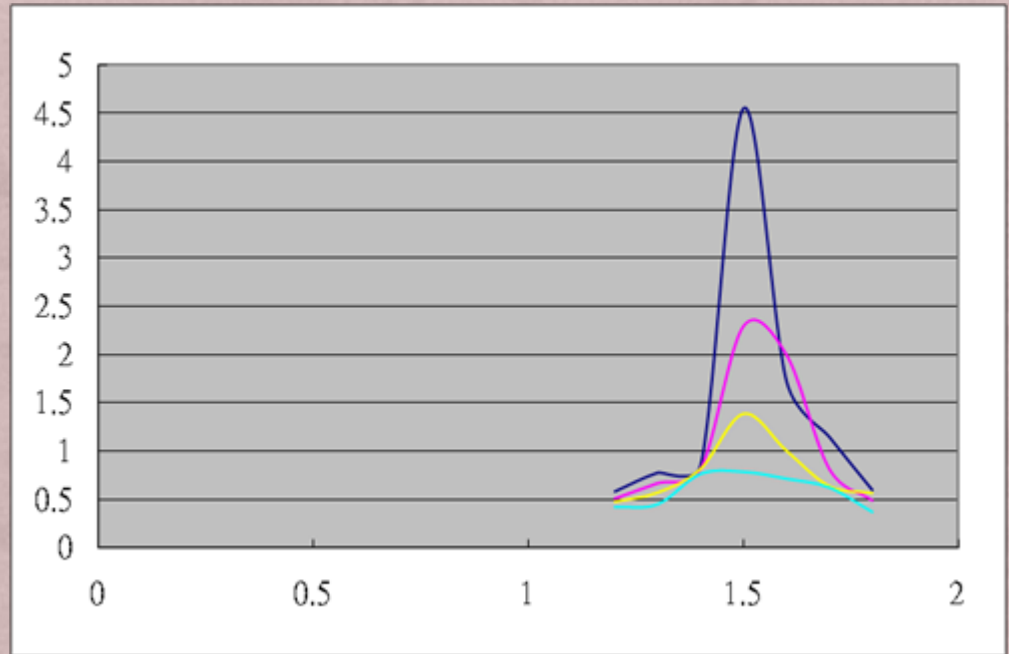
將所有實驗結果繪成一個圖表

深藍色：0對磁鐵

紫色：1對磁鐵

黃色：2對磁鐵

淺藍色：3對磁鐵



$$A = \frac{2 \lambda \omega_n A_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2) + (2 \lambda \omega)^2}}$$

利用公式計算出不同  
阻尼系數及頻率下車  
子的振幅，將計算結  
果繪成圖表。

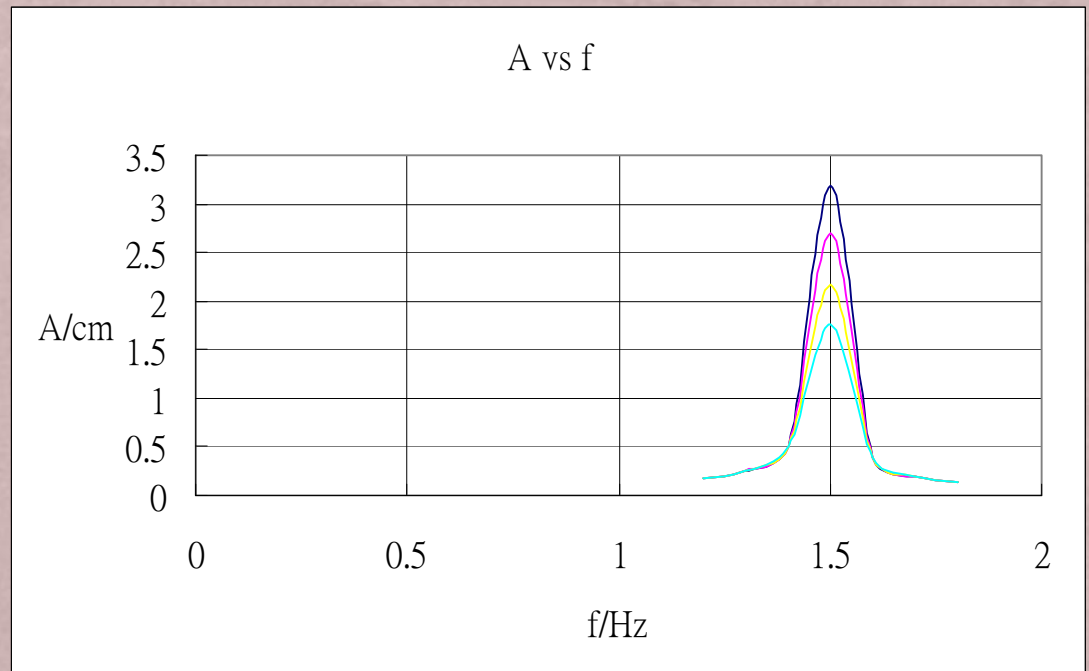
我們得出以下理論層面的圖表

深藍色:  $\lambda=0.0634$

紫色  $\lambda=0.0846$

黃色:  $\lambda=0.1142$

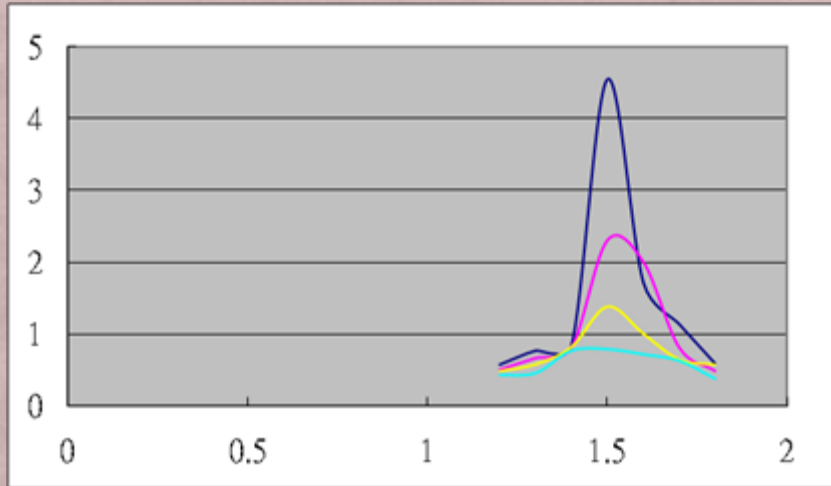
淺藍色:  $\lambda=0.1479$



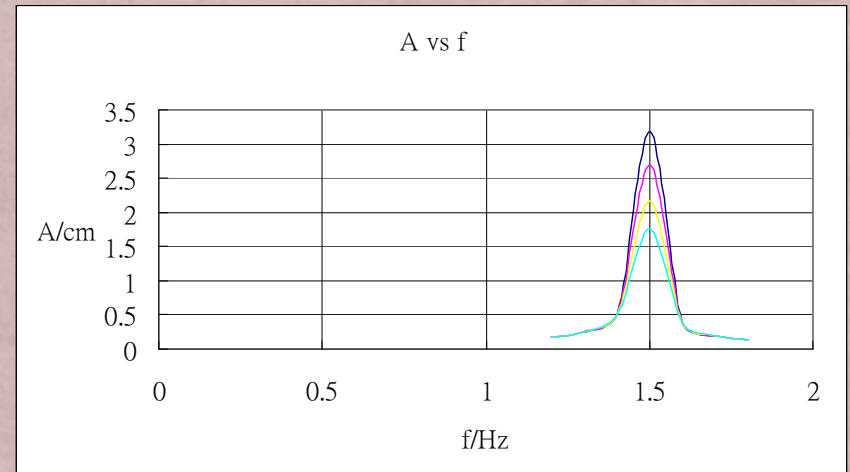


# 比較結果

實驗結果



理論結果



實驗與理論的結果相似。

# 解釋結果

- A) 阻尼系數的變化
  - 1. 磁鐵的磁力線穿過鋁軌
  - 2. 在鋁軌中感生出渦電流
  - 3. 根據弗林明左手定理，磁力作用於鋁軌向前的力
  - 4. 同時並有反作用力將車子推向後，而此反作用力則叫阻力
  - 5. 磁鐵愈多，阻力愈大

# 解釋結果

## B) 不同外加頻率對振幅的影響

1. 在強震器由1.2上升至1.4，震幅隨著頻率上升而增加，但震幅不明顯，原因是外界頻率並不接近其自然頻率，彈簧吸收的能量會較少，所以震幅亦變得小。
2. 在1.5時，震幅很明顯及很大，因外界頻率接近其自然頻率，彈簧吸收的能量會較多，所以震幅亦變得大，稱為共振。
3. 在強震器由1.6上升至1.8，震幅隨著頻率上升而下降，但震幅不明顯，因外界頻率並不接近其自然頻率，彈簧吸收的能量會較少，所以震幅亦變得小。



# 解釋結果

## C) 阻尼系數對震幅的影響

1. 阻尼系數愈大，阻力愈大
2. 阻力愈大，能量流失愈多
3. 能量流失愈多，頻率愈小

## 誤差

1. 在彈簧和車子，震動器的接位置會有摩擦力，而其摩擦力便會影響其震幅。
2. 因為有空氣阻力，會令合力減少，影響震幅。
3. 用HDMVA，未有利用影片中段找出車子在不同時間的位置，車子振動未達至穩定狀態，影響圖片數據。

## 改善

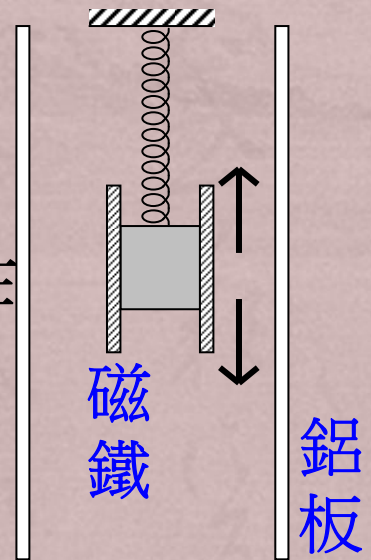
1. 在路軌和車子之間加潤滑油。
2. 增加車子的重量，減低空氣阻力對實驗的影響。
3. 用HDMVA時使用影片中段找出車子在不同時間的位置。

## 結論

外加頻率與自然頻率相同會有最大振幅及在較大阻尼時，振幅會變小，所以理論符合現實。

# 困難1

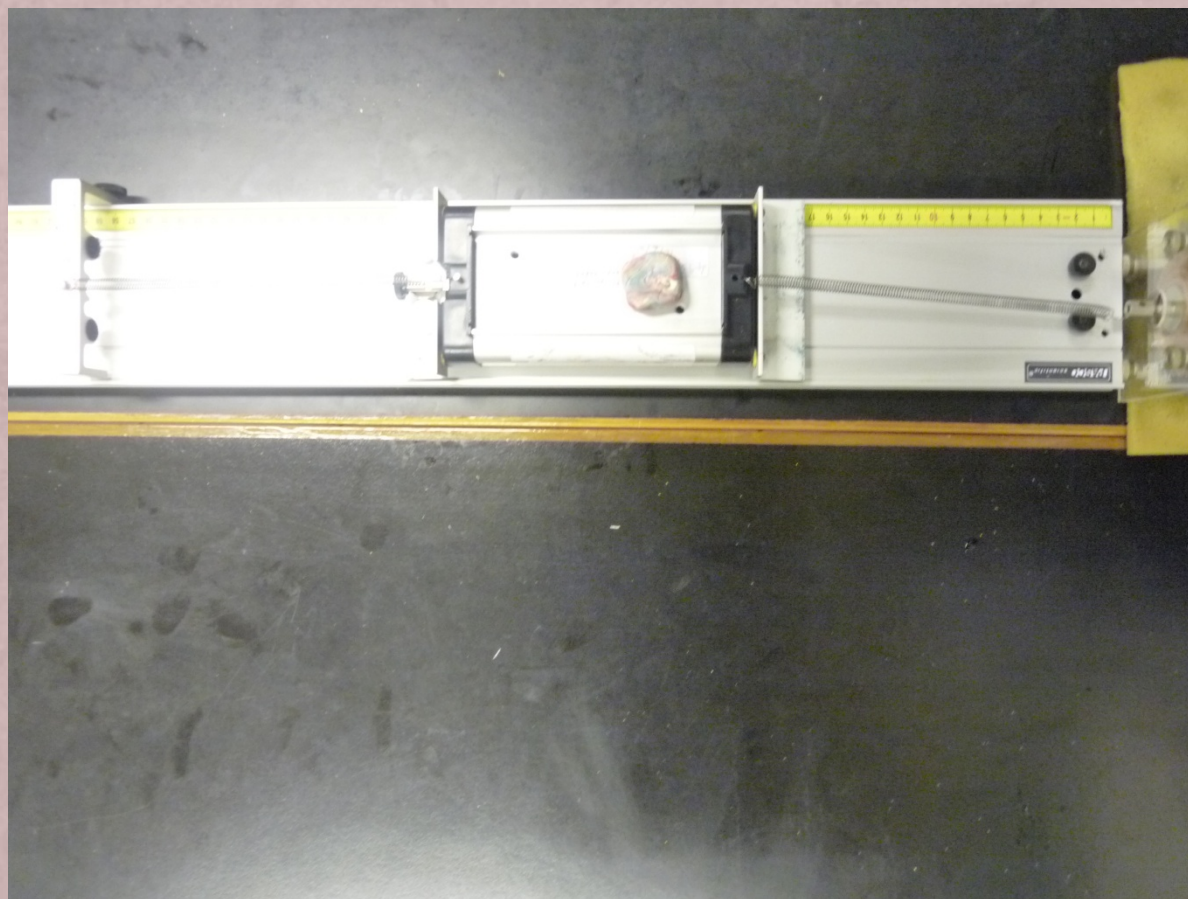
1. 起初我們用彈簧垂直地懸掛重物(下圖)
2. 後來發現除了垂直擺動外還會左右擺動，因此不能地準確地量度振幅。
3. 於是我們想：用路軌作為震動系統是否可行。
4. 經詢問老師後，便提議我們再作試驗



發現震動時會旋轉

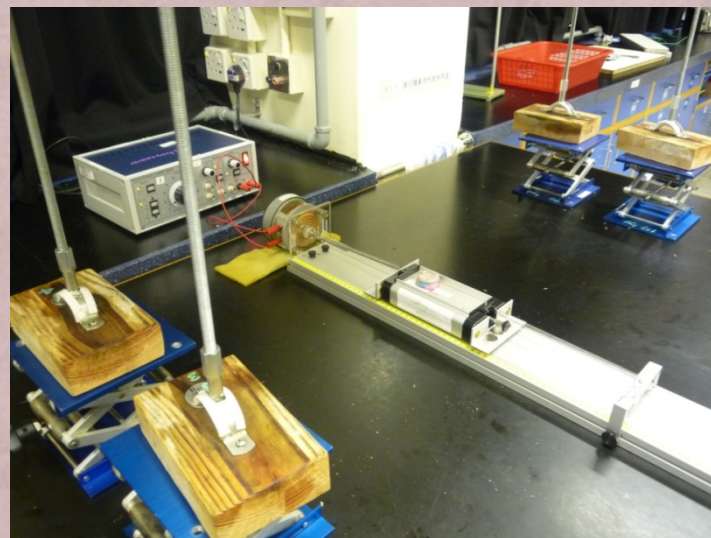
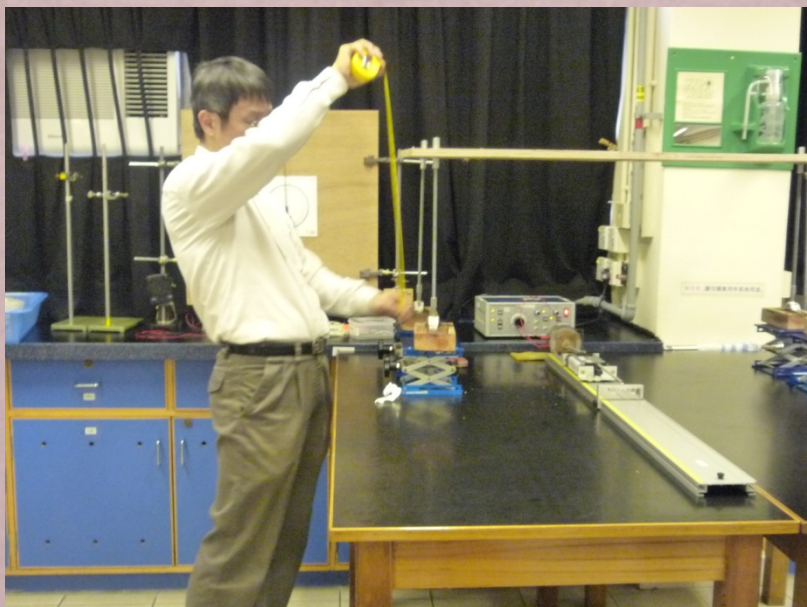


用軌道和車子令它只會在一个平面上振動  
而不會再左右振動。(下圖)



## 困難2

由於實驗裝置較為複雜，裝置時需要多人協助。而其中有部份裝置需用上磁鐵，而這些均是強力磁鐵，在裝置時會有機會被磁鐵夾到手指，從而受傷。



幸好有實驗室助理協助我們裝置。



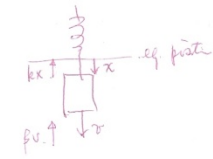
# 困難3

利用公式去預計結果的一部份，而在該部份是現時高級程度會考課程中沒有的，所以要利用此公式計算出結果是十分困難。

然後老師將此公式計算出，讓我們利用此公式計出理論層面上的結果，並且能夠與實驗結果作比較。

$$A = \frac{2 \lambda \omega_n A_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2) + (2 \lambda \omega)^2}}$$

Very  
Damped of the vibrator



Free body diagram showing forces:  $kx$  (spring force),  $\beta v$  (damping force), and  $mg$  (weight). The displacement is  $x$  and the equilibrium position is indicated.

$$F_{net} = -\beta v - kx = ma.$$

$$\therefore m \frac{dx}{dt} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Let  $x = A e^{-\lambda t} \sin \omega t$

$$\frac{dx}{dt} = A e^{-\lambda t} [-\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t]$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A e^{-\lambda t} \{-\lambda(-\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t) + (-\lambda \omega \cos \omega t - \omega^2 \sin \omega t)\}$$

$$= A e^{-\lambda t} [(\lambda^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2\lambda \omega \cos \omega t]$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = A e^{-\lambda t} \left\{ m [(\lambda^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2\lambda \omega \cos \omega t] + \beta [-\lambda \sin \omega t + \omega \cos \omega t] + k \sin \omega t \right\} = 0$$

$\therefore$  As no sin is always = 0.

$$\therefore m(\lambda^2 - \omega^2) - \beta \lambda + k = 0 \text{ and } -2m\lambda \omega + \beta \omega = 0.$$

$$\lambda = \frac{\beta}{2m}$$

$$m\lambda^2 - \beta \lambda + k = m\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\beta \lambda}{m} + \frac{k}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta \lambda}{m} + \lambda^2}$$

The vibrator frequency  $\omega$  varies from the natural frequency  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  but if  $\lambda$  is small  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n$ .

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \lambda^2}$$



# 體驗及感想

1. 由於此探究過程中的知識並不被包括在高考科程內，所以使我們學到課程外的知識，並有助簡諧運動上有更深入的認識。
2. 令我們知道在實驗中雖然理論和實驗相似，可以說理論合乎現實，但是仍然有誤差，由此我們知道理論並不是百分百準確，在真實情況下，有很多不同的外在因素會令現實和理論有一些出入，所以要進行一些實驗試驗。  
「盡信書不如無書！」
3. 在研究探討過程中，進行實驗時往往有很多因素使實驗不能進行，研究會變得困難，是需要有耐性地和積極性地想出不同的解決方法及試驗方法是否可行。

**THE END**